Serie 4

1. **a)** Es sei $\Gamma \in Z_1(\mathbb{C})$ ein 1-Zykel. *Zeige*: Es existieren geschlossene Integrationswege $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ (nicht notw. verschieden), so dass

$$\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{sp} \gamma_i \;=\; \operatorname{sp} \Gamma \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) = \sum_{i=1}^{r} n(\gamma_i, z)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} \Gamma$. *2 Punkte*

b) Es seien $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. *Zeige*:

$$H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}) \;\cong\; \mathbb{Z}^k \,.$$

2 Punkte

2. **a)** Berechne $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$ für $|a| < r < |b|$ mit $m, n \geq 1$. *2 Punkte*

b) Berechne $\oint_{|z|=r} f(z) dz$ für $f(z) = \frac{z^2 + (1-2i)z - 2}{z^3 - (1+2i)z^2 + (2i-1)z + 1}$ und für alle $r \neq 1$. *2 Punkte*

3. **a)** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade in der Ebene $\mathbb{C}$. Es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U \setminus L$ holomorph. Zeige, daß f auf ganz U holomorph ist. *2 Punkte* *2 Punkte*

b) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $z \in G \Leftrightarrow \bar{z} \in G$, d.h. symmetrisch zur reellen Achse. Es sei $f \colon \{\, z \in G \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \,\} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\{\, z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ holomorph, sowie $f(\mathbb{R} \cap G) \subset \mathbb{R}$. Zeige, daß durch

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

eine auf G holomorphe Funktion definiert wird. Diese Methode heißt **Schwarzsches Spiegelungsprinzip** nach Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). *2 Punkte*

4. **a)** Entscheide und begründe, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind:

$$\frac{z}{e^z - 1}, \qquad z^2 \sin \frac{1}{z} \,.$$

2 Punkte

b) Es sei $f \colon B_r(0) \to B_R(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. *Zeige*:

$$|f(z)| \leq \frac{R}{r} |z| \,.$$

Hinweis: Schwarzsches Lemma *2 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 06.05.

IV 1. a.

Schritt 1. Sei $\Gamma \in Z_1(\mathbb{C})$

Dann es gibt $\Gamma' = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \in Z_1(\mathbb{C})$ mit γ_i, $i=1,\dots,N$ Integrationswege und $Sp\,\Gamma = sp\,\Gamma'$ und $n(\Gamma, z) = n(\Gamma', z)$ $\forall z \notin Sp(\Gamma)$. #

Beweis: $\Gamma = \sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i = \sum_{j=1}^{\sum |n_i|} \varepsilon_j \beta_j = \sum_{j \in I} \varepsilon_j \beta_j$

wobei $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ und $\{\alpha_i\} = \{\beta_i\}$.

Sei $I_\pm = \{ i \in I \mid \varepsilon_i = \pm 1 \}$.

Setze
$$\gamma_i := \begin{cases} \beta_i & i \in I_+ \\ \overleftarrow{\beta}_i & i \in I_- \end{cases}$$

$\boxed{\overleftarrow{\beta}_i(t) := \beta_i(1-t)}$

und $\Gamma' = \sum_{i \in I} \gamma_i$

Dann $sp\,\Gamma' = \bigcup sp\,\gamma_i = \bigcup sp\,\beta_i = \bigcup sp\,\alpha_i = sp\,\Gamma$.

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{\ell} n_i \int_{\alpha_i} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i \in I} \varepsilon_i \int_{\beta_i} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\gamma_i} \frac{d\xi}{\xi - z} = n(\Gamma', z)$$ #.

Schritt 2: Beweis nach Induktion durch card I.

I.A. Sei card $I = 1 \Rightarrow \Gamma = \gamma_i \in Z(\mathbb{C})$

$\partial\Gamma = 0 \Rightarrow \gamma(0) = \gamma(1) \Rightarrow \gamma$ ist geschlossener Weg.

I.V. Fur alle $\Gamma = \sum_{i \in I} \gamma_i \in Z(\mathbb{C})$

mit card $I \leq n$, gilt:

$\exists\, \delta_1, \dots, \delta_k$ - geschlossene [illegible]-Wege, so dass

$S_p \Gamma = \bigcup_1^k S_p \delta_i$ und $n(\Gamma, z) = \sum_1^k n(\delta_i, z)$.

I.S. Sei $\Gamma = \sum_{i \in I} \gamma_i \in Z(\mathbb{C})$ mit

card $I = n+1$.

~~Nimm $i_0 \in I$. Da $\partial\Gamma = \sum(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) = 0$,~~

~~gibt es i_1 mit $\gamma_{i_1}(0) = \gamma_{i_0}(1)$.~~

~~· Falls $i_1 = i_0 \Rightarrow \gamma_{i_0}$ ist geschlossen~~

~~setze $\delta = \gamma_{i_0}$.~~

~~· Sonst $\exists\, i_2$ mit~~

Satz. Es gibt $\{i_0, \dots, i_\ell\} \subset I$

mit $\gamma_{i_0}(1) = \gamma_{i_1}(0)$, $\gamma_{i_1}(1) = \gamma_{i_2}(0)$ ....

$\gamma_{i_\ell}(1) = \gamma_{i_0}(0)$ #.

Beweis: Wähle $i_0 \in I$, Da $\partial\Gamma = \sum(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) = 0$

$\exists\, i_1 \in I$ mit $\gamma_{i_1}(0) = \gamma_{i_0}(0)$

Falls $i_1 = i_0 \Rightarrow$ Ende.

Sonst wähle i_2 mit $\gamma_{i_1}(1) = \gamma_{i_2}(0)$

Falls $i_2 = i_0$ $\{i_0, i_1\}$ ist benötige Folge.

Sonst . . wähle i_3 . . . .

#.

Nimm $\delta = \gamma_{i_0} \# \gamma_{i_1} \# \dots \# \gamma_{i_e}$, $\Gamma' = \sum_{i \in I \setminus \{i_0, \dots, i_e\}} \gamma_i$

Dann offenbar $S_p \Gamma = S_p \delta \cup S_p \Gamma'$

und $n(\Gamma, z) = n(\delta, z) + n(\Gamma', z) \quad \forall z \notin S_p \Gamma$

Nach I. V. $\exists\ \delta_1, \dots, \delta_e$ mit

$S_p \Gamma' = \bigcup S_p \delta_i$ und $n(\Gamma', z) = \sum n(\delta_i, z)$.

$$\Rightarrow S_p \Gamma = \left(\bigcup_1^e S_p \delta_i\right) \cup S_p \delta$$

$$n(\Gamma, z) = \sum_1^e n(\delta_i, z) + n(\delta, z).$$

#.

IV. 1. 6. Betrachte

$$\varphi : H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}) \longrightarrow \mathbb{Z}^k$$

$$[\Gamma] \longmapsto \begin{pmatrix} n(\Gamma, z_1) \\ n(\Gamma, z_2) \\ \vdots \\ n(\Gamma, z_n) \end{pmatrix}$$

φ ist wohldefiniert.

Falls $[\Gamma] = [\Gamma']$ dann

$n(\Gamma, z) = n(\Gamma', z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

$\Rightarrow \varphi([\Gamma])$ ist wohldefiniert.

1. φ ist linear.
2. $\varphi(H_1(\dots)) = \mathbb{Z}^k$. surjektiv.
3. $\ker \varphi = \{0\}$.

Beweis: 1. Klar.

2. Man zeigt dass $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \varphi H_1(\dots)$

Betrachte $\left(\gamma_i(t) := z_i + \varepsilon e^{2\pi i t}\right) : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{\dots\}$.

Nimm $\varepsilon > 0$, so dass $B_{2\varepsilon}(z_i) \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \{z_i\}$.

Dann $\gamma_i \in Z_1(\mathbb{C} \setminus \{\dots\})$ und

$n(\gamma_i, z_j) = \delta_{i,j} \Rightarrow \varphi[\gamma_i] = e_i$

$\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv.

3. Sei $\Gamma \in Z_1(\mathbb{C} \setminus \{\dots\})$ mit

$\varphi([\Gamma]) = 0$

Dann $n(\Gamma, z_i) = 0 \quad \forall i \Rightarrow$

$n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\dots\}$

$\Rightarrow \Gamma$ ist nullhomolog $\Rightarrow$

$\ker \varphi = \{0\}$. #.

IV. 2. a $\quad$ Sei $\left(f(z) = \frac{1}{(z - b)^m} : B_{|b|} \to \mathbb{C} \right) \in \mathcal{O}$

Dann $\displaystyle\int_{S_r} \frac{dz}{(z-a)^m (z-b)^n} = \int_{S_r} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^n}$

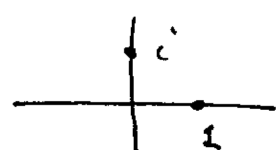
$$= \frac{2\pi i}{n!} f^{(n-1)}(a) = (-1)^{(n-1)} m(m+1) \dots (m+n-2) (z-b)^{-(m+n-1)} \Big|_{z=a}$$

$$= (-1)^{(n-1)} \frac{2\pi i\, (m+n-2)!}{n!\,(m-1)!} (a-b)^{-(m+n-1)} = \frac{2\pi i\, (m+n-2)!\, (-1)^m}{n!\, (m-1)!\, (b-a)^{m+n-1}}$$

IV. 2. b. $\quad f(z) = \dfrac{z^2 + (1-2i) z - 2}{z^3 - (1+2i) z^2 + (2i-1) z + 1} = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

$q(z) = (z-1)(z^2 - 2iz - 1) = (z-1)(z-i)^2$

$p(1) \neq 0 \quad p(i) \neq 0.$



Sei $0 < r < 1$. Dann $f \in \mathcal{O}(B_{r+\varepsilon})$, $0 < \varepsilon \ll 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{S_r} f(z)\, dz = 0.$

Sei $r > 1$ Dann $f \in \mathcal{O}\big(B_r \setminus (B_\varepsilon(i) \cup B_\varepsilon(1))\big)$

für $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\Rightarrow \int_{S_r} f(z)\, dz = \int_{B_\varepsilon(i)} f(z)\, dz + \int_{B_\varepsilon(1)} f(z)\, dz$$

$$= \int_{B_\varepsilon(i)} \frac{\frac{p(z)}{(z-1)}}{(z-i)^2}\, dz + \int_{B_\varepsilon(1)} \frac{\frac{p(z)}{(z-i)^2}}{z-1}\, dz$$

$$\frac{2\pi i}{2} \frac{d}{dz} \frac{p(z)}{z-1}\Bigg|_{z=i} + 2\pi i \frac{p(1)}{(1-i)^2} =$$

$$= \pi i \left(\frac{\left(2z + (1-2i)\right)(z-1) - z^2 + (1-2i)z - 2}{(z-1)}\Bigg|_{z=i} \right.$$

$$\left. + 2 \frac{1 + (1-2i) - 2}{(1-i)^2} \right) = 2\pi \left(\frac{-1}{i-1} + \frac{2}{(1-i)^2} \right) =$$

$$= 2\pi \frac{1+3i}{2} = \pi + 3\pi i$$

IV. 3.a Zwei Methoden:

1. Man nutzt Verallgemeinerung des Cauchy Integral Satzes: (siehe Übung vom 29.4.10).
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein ~~[illegible]~~ beschraenktes Gebiet mit ∂U eine Vereinigung des J-Weges.
Sei $f \in \mathcal{O}(U) \cap C^0(\bar{U})$ dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} \quad \forall z \in U. \qquad \#.$$

Sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus L) \cap C^0(U)$.

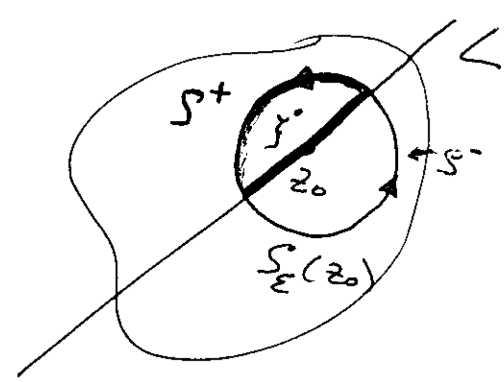
Sei $z_0 \in L \cap U$ und $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset U$

Betrachte $\left(\tilde{f}(\xi) := \int_{S_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z - \xi}\right) : B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$

Z.z. 1. $\tilde{f}(\xi)$ ist holomorph.
Die gleiche Beweis wie in C.I.S. geht auch in diesem Fall.

Z.z. 2. $\tilde{f} = f\big|_{B_\varepsilon(z_0)}$

Sei $\xi \in B_\varepsilon(z_0) \setminus L$.



Dann $\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z - \xi} =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S^+} \frac{f(z)\,dz}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{S^-} \frac{f(z)\,dz}{z - \xi} = \cancel{\#}$$

~~[illegible] [illegible] Summanden ist $\neq 0$.~~

$\star$ Sei $n(S^+, \xi) = 1$ & $n(S^-, \xi) = 0$

Dann $\star = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^+} \frac{f(z)\,dz}{z - \xi} = f(\xi)$ nach C.I.S.

$\Rightarrow f(z) = \tilde{f}(z) \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus L$

Da f und $\tilde{f}$ stetig sind und $B_\varepsilon(z_0) \setminus L$ dicht in $B_\varepsilon(z_0)$ ist, ergibt sich dass $f(z) = \tilde{f}(z) \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$.

Also $f(z)$ ist holomorph in die Umgebung von $z_0 \in L \quad \forall z_0 \in U \cap L \Rightarrow$
$f \in \mathcal{O}(U)$.

IV. 3. b. Z.z. $\hat{f}$ ist stetig.

Setze: $G_+ = \{ z \in G \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \}$

$G_- = \{ z \in G \mid \operatorname{Im} z \leq 0 \}$.

Dann $\hat{f}|_{G_+}$, $\hat{f}_{G_-}$ sind stetig.

Sei $z_0 \in \mathbb{R} \cap G = G_+ \cap G_-$ und $\{z_i\} \in G^{\mathbb{N}}$

$z_i \longrightarrow z_0$ Dann $(z_i) = (z_i^+) \cup (z_i^-)$

wobei $(z_i^\pm) = (z_i) \cap G_\pm$ und

$\lim \hat{f}(z_i^\pm) = \hat{f}(z_0) \Rightarrow \lim \hat{f}(z_i) = z_0 \Rightarrow$

$\hat{f}$ ist stetig.

Z.z. $\hat{f}$ ist holomorph auf $G \setminus \mathbb{R}$

Sei $z_0 \in G \setminus \mathbb{R}$.

Fall 1. $\operatorname{Im} z_0 > 0 \Rightarrow \hat{f}|_{B_\varepsilon(z_0)} = f|_{B_\varepsilon(z_0)}$

für $0 < \varepsilon \ll 1 \Rightarrow f$ ist holo in $B_\varepsilon(z_0)$.

Fall 2. $\operatorname{Im} z_0 < 0$

$$\lim \frac{\hat{f}(z_0 + h) - \hat{f}(z_0)}{h} = \lim \frac{\overline{f(\bar{z}_0 + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{h}$$

$$= \overline{\lim \frac{f(\bar{z}_0 + h) - f(\bar{z}_0)}{h}} = \overline{f'(\bar{z}_0)}$$

$\Rightarrow f$ ist komplex diff'bar $\forall z_0 \in \mathring{G}_-$

1 & 2 $\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{O}(G \setminus \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$.

Nach 3.a. ist $\hat{f}$ holomorph auf G.

IV. 4. a. 1. Betrachte $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

$\forall z \in \mathbb{C}$. Also $\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ ist beschränkt und hat eine holo Fortsetzung f auf 0.

$f(0) = \left(\frac{d}{dz} e^z\right)\Big|_{z=0} = 1 \neq 0$

Dann $\frac{1}{f}$ ist holomorph Fortsetzung von $\frac{z}{e^z - 1}$ in 0.

2. Betrachte $Z := \{ z \mid z^2 \sin \frac{1}{z} = 0 \}$

Dann $\left\{ \frac{1}{\pi k} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset Z \Rightarrow 0$ ist ein Häufungspunkt der Menge Z.

Da die Menge der Nullstellen der holo Funktion keine Häufungspunkte in dem Definitionsbereich hat, hat $z^2 \sin \frac{1}{z}$ keine holo Fortsetzung in 0.

<u>Oder:</u> Betrachte eine Folge $z_k = \frac{1}{ki}$

Dann $\left| z^2 \sin \frac{1}{z} \Big|_{z_k} \right| = \left| \frac{-1}{k^2} \frac{e^k - e^{-k}}{2} \right| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow z^2 \sin \frac{1}{z}$ ist nicht beschränkt in $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ sie ~~hat~~ ist nicht fortsetzbar.

7.

IV 4.6 $\Big(f:(B_r(0),0)\to(B_R(0),0)\Big)\in\mathcal{O}(B_r)$

Betrachte $g(w):=\frac{1}{R}f(rw)$

Dann $(g:\mathbb{E}\to\mathbb{E})\in\mathcal{O}(\mathbb{E})$

und $g(0)=0$.

Folglich erfüllt g S ungleichung

$|g(w)|\leq|w|\quad\forall w\in\mathbb{E}$

$\Rightarrow\ |f(z)|\leq\frac{R}{r}|z|\quad\forall z\in B_r(0)$ #

Bemerkung zu Übung 29.04.

Die richtige konforminvariante Schwarzsche Ungleichung für $\mathbb{H}$ ist:

Sei $(f:\mathbb{H}\to\mathbb{H})\in\mathcal{O}(\mathbb{H})$ Dann

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_1)-\overline{f(z_2)}}\right|\leq\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\overline{z_2}}\right|$$

$\forall z_1,z_2\in\mathbb{H}$.

und $\left|\frac{f'(z)}{\operatorname{Im}f(z)}\right|\leq\left|\frac{1}{\operatorname{Im}z}\right|$.