Serie 3

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_o \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: *4 Punkte*

- f hat in z_o eine Nullstelle mit $\operatorname{ord}_{z_o} f = n$,
- $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_o)^k$ mit positivem Konvergenzradius
- ex. $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_o))$ für ein $\varepsilon > 0$ mit $g(z_o) \neq 0$ und $f(z) = g(z)(z - z_o)^n$.

2. Zeige für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ auf einem Gebiet G:

a) Wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f(z) = c \cdot \bar{f}(z)$ f.a. $z \in G$, dann ist f konstant. *1 Punkt*

b) Wenn $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $g \circ f$ ist konstant, dann ist f oder g konstant. *1 Punkt*

c) Wenn $f_1, \ldots, f_N$ auf G holomorph sind und $|f_1|^2 + \ldots + |f_N|^2$ ist konstant, dann ist jedes f_j konstant. *2 Punkte*

3. *Aufgabe zu den Logarithmus-Funktionen*: Es sei $D \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $l\colon D \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\exp l(z) = z$ für alle $z \in D$ heißt ein **stetiger Zweig des Logarithmus**. *Zeige (je 1 Punkt)*:

a) Je zwei stetige Zweige $l, \tilde{l}$ des Logarithmus haben die Eigenschaft $\tilde{l} = l + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

b) Jeder stetige Zweig l des Logarithmus ist holomorph, $l \in \mathcal{O}(D)$, und es gilt $l'(z) = \frac{1}{z}$.

c) Auf D existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus, wenn die Funktion $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf D hat.

d) Man konstruiere zwei Gebiete D_1 und D_2 und stetige Zweige $l_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$, $l_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$ des Logarithmus, so daß ihre Differenz auf $D_1 \cap D_2$ nichtkonstant ist.

4. Betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Diese Abbildung ist nicht injektiv (da $f(z) = f(\frac{1}{z})$) aber konform auf $\mathbb{C}^\times$, d.h. das Differential $Df(z)$ in jedem Punkt mit $f'(z) \neq 0$ eine konforme lineare Abbildung. *Zeige (je 1 Punkt)*:

a) Das Bild der Kreislinie $S_r := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \,\}$, $r > 0$, unter f ist

(i) im Fall $r \neq 1$ eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 und Halbachsen $\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ bzw. $\frac{1}{2}|r - \frac{1}{r}|$,

(ii) $f(S_1) = [-1, 1]$.

b) Das Bild einer Halbgeraden $r \mapsto re^{i\phi}$, $r > 0$ ($\phi \notin \{0, \pm\pi/2, \pi\}$, ϕ fest) ist ein Ast einer Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1.

Bitten wenden!

c) Es seien $D_1 := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1 \}$ und $D_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1 \}$. Dann bilden $f_{|D_1}$ und $f_{|D_2}$ jeweils diese Mengen konform auf die sogenannte längs der reellen Achse von -1 bis 1 geschlitzte Ebene ab, d.h. auf

$$\mathbb{C} \setminus \{ t \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq t \leq 1 \} .$$

d) Skizziere das Bild eines hinreichend feinen "Gitters" aus x- und y-achsenparallelen Geraden unter der Abbildung f.

Rückgabe: In den Kasten am 29.04.

$\underline{III.1.}$ $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$, U - offen, $f \in \mathcal{O}(U)$

1) f hat in z_0 eine Nullstelle mit $ord_{z_0} f = n$

2) $f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ mit K-Radius $R > 0$, und $a_n \neq 0$.

3) $\exists\, g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$ für $0 < \varepsilon \ll 1$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.

$\underline{1) \Rightarrow 2)}$ f ist holomorph $\Rightarrow$ f ist ~~komplex~~ analitisch $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i$ auf $B_R(z_0)$ mit $R > 0$,

Nach die Voraussetzung hat f eine N.S. in z_0 mit $ord_{z_0} f = n$. Also $f^{(i)}(z_0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

Also $f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{f^{(i)}}{i!} (z - z_0)^i$.

Da $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, $f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ mit $a_n \neq 0$.

$\underline{2) \Rightarrow 3)}$ $f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i (z - z_0)^i = (z - z_0)^n \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+n} (z - z_0)^i$

Da $g(z) := \sum_{i=0}^{n} a_{i+n} (z - z_0)^i$ ein > 0 Konvergenzradius ~~hat~~, ist $g(z)$ also holomorph und $g(0) = a_n \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

3) $\Rightarrow$ 1) Sei $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$.

$f^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{d^i}{(dz)^i} (z - z_0)^n \cdot \frac{d^{k-i}}{(dz)^{k-i}} g(z)$

Also $f^{(k)}(z_0) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k,n} (z-z_0)^{n-i} g^{(k-i)}\Big|_{z=z_0} & \text{für } k<n \\ n!\, g(z_0) & \text{für } k=n \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & k<n \\ n!\, g(z_0) \neq 0 & k=n \end{cases} \Rightarrow f$ hat in z_0 eine

N.S. mit $\operatorname{ord}_{z_0} f = n$.

III. 2. a) $f(z) = c\,\bar{f}(z)$. Sei $d \in \mathbb{C}$ mit

$d^2 = c$. Betrachte $g(z) = \frac{f(z)}{d}$

(falls $d=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow f \equiv 0$ Konst.)

Dann $d \cdot g(z) = d^2 \cdot \bar{d} \cdot \bar{g}(z) \Rightarrow$

$g(z) = |d|^2 \bar{g}(z) \Rightarrow (g(z))^2 = |d|^2 |g(z)|^2$

$\Rightarrow g^2(z)$ ist $\mathbb{R}$-wertige holomorphe Funktion. Nach Gebiettreu $g^2(z)$ ist eine Konstante. Nach stetigkeit, sind g und f auch Konstanten.

Hilfsatz: $(f : U \to \mathbb{C}) \in \mathcal{O}(U)$ und $f(z) \in \mathbb{R}$ $\forall z \in U \Rightarrow f$ ist konstant. #

Beweis: $f = u + iv$ $u, v : U \to \mathbb{R}$

$v = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u = f$ - konstant. #

III. 2. b. $g \circ f$ ist konstant $\Rightarrow$

$$g'(f(z)) \cdot f'(z) = 0 \quad \forall z \in G.$$

Betrachte $Z_{f'} := \{ z \mid f'(z) = 0 \}$.

Fall 1 $Z_{f'} = G \Rightarrow f$ ist konstant.

Fall 2 $Z_{f'} \neq G \Rightarrow Z_{f'}$ ist diskrete Menge.

$\Rightarrow \exists\, U \subset G$ -offen mit $U \cap Z_{f'} = \emptyset$

Es folgt, $g'(f(z)) = 0 \quad \forall z \in U$

Nach Gebiettreuen Satz $U_1 = f(U)$ ist ein Gebiet, also $g'|_{U_1} \equiv 0 \Rightarrow g'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow g$ ist konstant.

III. 2. c. Hilfsatz: Sei $f = u + iv \in \mathcal{O}(U)$

1. Dann $\Delta |f|^2 = 2(u_x)^2 + 2(u_y)^2 = 2((v_x)^2 + (v_y)^2) \geq 0$ $\forall z \in U$. ($|f|^2$ ist subharmonisch).

2. Falls $\Delta |f|^2 \equiv 0$, dann ist f konstant #.

Beweis: Rechnung. #.

Sei $\sum_1^n |f_i|^2$ konstant $\Rightarrow$

$$\Delta \sum_1^n |f_i|^2 = \sum_1^n \Delta |f_i|^2 = 0 \overset{\text{Hilfsatz 1.}}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta |f_i|^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \underset{\text{HS. 2.}}{\Longrightarrow} f_i \text{ ist konstant } \forall i = 1, \dots, n$$

III. 3. a Sei $\ell, \tilde{\ell} : D \to \mathbb{C}$ zwei stetige Zweige des Logarithmus. $\Rightarrow \exp(\ell(z) - \tilde{\ell}(z)) =$

$$= \frac{\exp(\ell(z))}{\exp(\tilde{\ell}(z))} = 1 \quad \forall z \in D$$

$$\Rightarrow \exp(\operatorname{Re} \ell(z) - \operatorname{Re} \tilde{\ell}(z)) \big(\cos(\operatorname{Im} \ell(z) - \operatorname{Im} \tilde{\ell}(z))$$
$$+ i \sin(\operatorname{Im} \ell(z) - \operatorname{Im} \tilde{\ell}(z)) \big) = 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \ell(z) = \operatorname{Re} \tilde{\ell}(z) \\ \operatorname{Im} \ell(z) - \operatorname{Im} \tilde{\ell}(z) = 2\pi k(z) \quad k(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in D \end{cases}$$

Da $\ell, \tilde{\ell}$ stetig sind und D zusammenhängt ist, ist $k(z) =: k$ konstant.

$$\Rightarrow \ell(z) - \tilde{\ell}(z) = 2\pi i k \quad \forall z \in D.$$

III. 3. b. $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\operatorname{rang}(d_z \exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2) = 2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Nach Inverse Funktion Satz ist ℓ - reel stetig diff'bar.

Rechne $\exp(\ell(z)) = z$

$$d_{\ell(z)} \exp \circ d_z \ell = id. \quad d_z \ell = (d_{\ell(z)} \exp)^{-1}$$

$\Rightarrow d_z \ell$ ist komplex linear $\forall z \in D$

ℓ ist holomorph. und

$$\ell'(z) = \frac{1}{\exp(\ell(z))} = \frac{1}{z}$$

III. 3. c. ($\Rightarrow$) ergibt sich von 3. b.

($\Leftarrow$) Sei $g(\cancel{x}) : D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion der $\frac{1}{z}$, $g'(z) = \frac{1}{z}$.

Dann $\cancel{\frac{d}{dz}(\exp(g(z))) = \exp}$

$$\frac{d}{dz}\, g(\exp(z)) = \frac{1}{\exp(z)} \cdot \exp(z) = 1.$$

$$\Rightarrow \quad g(\exp(z)) = z + c.$$

Nimm $g(z) - c =: h(z) : D \to \mathbb{C}$.

Dann $h(\exp(z)) = z \Rightarrow \exp(h(\exp z)) = \exp(z)$

~~Also~~ Setze $f(z) := (\exp(h(z)) - z) : D \to \mathbb{C}$

Dann $f \circ \exp(z) = 0 \quad \forall z \in \exp^{-1}(D)$.

Nach Aufgabe 2. b, f ist konstant und $f(z) = 0$ $\forall z \in D \Rightarrow \exp(h(z)) = z \Rightarrow$ h ist ein stetige Zweig des Logarithmus.

III. 3. d Sei $D_- := \mathbb{C} \setminus \{ z \mid z \in \mathbb{R},\ z \geq 0 \}$.

$D_+ := \mathbb{C} \setminus \{ z \mid z \in \mathbb{R},\ z \leq 0 \}$.

Nimm $\ell_1(z) := \ln|z| + i\,\Theta(z) : D_+ \to \mathbb{C}$

wobei $\Theta(z) \in (0, 2\pi)$ und $\begin{cases} \cos\Theta(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin\Theta(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \end{cases}$

Nimm $\ell_2(z) := \ln|z| + i\alpha(z) : D_- \to \mathbb{C}$

wobei $\alpha(z) \in (-\pi, \pi)$ und $\begin{cases} \cos\alpha(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \sin\alpha(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{cases}$

Man rechnet einfach, dass $\exp(\ell_i(z)) = z$, $i=1,2$ auf $D_\pm$.

$\ell_1(i) - \ell_2(i) = (1 + i\frac{\pi}{2}) - (1 + i\frac{\pi}{2}) = 0.$

$\ell_1(-i) - \ell_2(-i) = (1 + i\frac{3\pi}{2}) - (1 + i(-\frac{\pi}{2})) = 2\pi i \neq 0.$

$\Rightarrow \ell_1 - \ell_2$ ist nicht konstant auf $D_+ \cap D_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

III. 4. a. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Man parametrisiert $S_r^1(0)$ durch

$\gamma_r(t) = re^{2\pi i t} = r(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$

Dann $f(S_r)$ durch $f(\gamma_r(t)) = \dfrac{re^{2\pi i t} + \frac{1}{r}e^{-2\pi i t}}{2}$

$= \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos 2\pi t + \frac{i}{2}(r - \frac{1}{r})\sin 2\pi t$, $t \in [0,1]$

parametrisiert wird.

Also ist $f(S_r)$ eine Ellipse mit

Halbaxen $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ und $b = \frac{1}{2}|r - \frac{1}{r}|$.

Der Exzentrisität $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(r + \frac{1}{r})^2 - (r - \frac{1}{r})^2} / a = 1/\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$

und Brennpunkten $F_{1,2} = \pm ae = \pm 1$, $r \neq 1$

~~III. 4. b. Man parametrisiert den Strahlen durch $\gamma_\varphi(t) = e^{i\varphi + t}$, $t \in (-\infty, \infty)$~~

~~Dan~~

Falls $r = 1$, dann $f(S_1)$ durch $\cos(2\pi t)$, $t \in [0,1]$ parametrisiert wird. $\Rightarrow f(S_1) = [-1,1] \subset \mathbb{C}$.

III.4.b. Sei $G_\varphi = \{ e^{i\varphi + t} \mid t \in \mathbb{R} \}$ $\varphi \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

ein Strahl mit Argument φ.

Dann $f(G_\varphi) = \left\{ \frac{e^{i\varphi + t} + e^{-i\varphi - t}}{2} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \{ \cosh(t) \cdot \cos\varphi + i \sinh(t) \sin\varphi \mid t \in \mathbb{R} \}$.

eine ~~hyper~~ Ast einer Hyperbel mit ~~mit den Brenn~~ die Parameter $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$

Die Brennpunkten $F_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm 1$.

III.4.c. Sei $w \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$

Fall 1. $\operatorname{Re} w = 0 \Rightarrow w = iy,\ y \in \mathbb{R}^*$

Finde $\{ z \in D_1 = \{ z \mid |z| > 1 \} \mid \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = w \}$.

$= \{ z \in D_1 \mid iz - \frac{1}{iz} = 2y \}$

$= \{ y + \sqrt{y^2 + 1} \}$ - eindeutig bestimmt.

Fall 2. $\operatorname{Im} w = 0 \Rightarrow w \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

$\{ z \in D_1 \mid \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = w \} =$

$= \{ w + \sqrt{w^2 - 1} \}$. - eindeutig bestimmt.

Fall 3 $\operatorname{Im} w \neq 0$, $\operatorname{Re} w \neq 0$.

Dann liegt w auf eindeutig bestimmten Ast der Hyperbel

$$\{\cosh(t)\cos\varphi + \sinh(t)\sin\varphi \mid t \in (0,\infty)\}$$

Sei t_w, φ_w mit

$$(*) \quad \cosh(t_w)\cdot\cos\varphi_w + \sinh(t_w)\cdot\sin\varphi_w = w.$$

Es gibt eindeutig Lösung von $(*)$ auf $\{(t_w, \varphi) \in [0,\infty) \times (0, 2\pi)\}$.

Dann $z = e^{t_w + i\varphi_w}$ ist ein eindeutig Lösung $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = w$ auf

$$D_1 = \{z \mid |z| > 1\}.$$

Also $\left(f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right) : D_1 \to \mathbb{C} \setminus [0,1]$ ist bijektiv.

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2} \neq 0 \quad \forall z \in D_1$$

$\Rightarrow$ ~~...~~ bildet f D_1 auf $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ konform und bijektiv.

Analog mit D_2.

III. 4. d.