Serie 2

1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
Beweise den Satz aus der Vorlesung: f hat eine Stammfunktion auf $G \Leftrightarrow$

$$\oint_{\partial\triangle} f(z)dz = 0 \quad \text{f.a.} \ \triangle(z_1, z_2, z_3) \subset G\,.$$

2. Entscheide, ob folgende reellwertige Funktionen $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ auf Gebieten $D \subset \mathbb{C}$ Realteil einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ sind und wenn ja, bestimme f:

a) $\varphi(x,y) = (x\cos y - y\sin y)e^x$ auf $D = \mathbb{C}$.

b) $\varphi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ auf $D = \mathbb{C}^x$.

c) $\varphi(x,y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}$ auf $D_\varepsilon = \{(x,y) \neq 0 \,|\, \arctan(y/x) \in (\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)\}$ für beliebiges $0 < \varepsilon < \pi$.

d) $\log\sqrt{x^2+y^2}$ auf $D = \mathbb{C}^x$.

3. **a)** *Zeige*: Es gibt keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $(f(z))^2 = z$ f.a. $z \in \mathbb{C}^x$. *2 Punkte*

b) Es seien $f\colon \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z_o \in D$ mit $f(z_o) \neq 0$ und $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ zwei stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_o$. Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen $\dot\gamma_1(0)$ und $\dot\gamma_2(0)$. Berechne den Winkel $\tilde\alpha$ zwischen $\dot c_1(0)$ und $\dot c_2(0)$, wobei $c_j = f \circ \gamma_j$, $j = 1, 2$. Warum kann man f auch als eine konforme Abbildung bezeichnen? *1 Punkt*

c) Für folgende komplexe Funktionen $f\colon \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ bestimme man $f(D) \subset \mathbb{C}$ und man skizziere die Bildkurven unter f der achsenparallelen Geraden in D, d.h. $\{(x,y) \in D \,|\, x \text{ oder } y \text{ konstant}\}$.

- $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0 \,\}$. *1 Punkt*

4. **a)** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass der Rand durch einen einfach geschlossenen Integrationsweg γ gegen den Uhrzeigersinn parametrisiert wird, $\partial G = \operatorname{sp}\gamma$. *Zeige* ohne Verwendung der Cauchy-Integralformel, dass $\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ für alle $z \in G$ gilt. *2 Punkte*

b) Es sei nun $G = (-3,3) \times (0,3)$ und $p(z) = z^3 - z^2 + 2z - 1$. Berechne

$$\oint_{\partial G} \frac{dz}{p(z)}\,.$$

2 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 22.04.

Serie 2

II.1. Sei $z_0 \in G$ eine Ursprung des Gebietes G
$\left(\forall z \in G \quad [z_0, z] = \{(1-\lambda) z_0 + \lambda z \mid \lambda \in [0,1]\} \subset G\right)$
$[z_0, z]$ ist ein Spur des Weges $\gamma_{z_0,z}(t) := z_0 + t(z-z_0)$
$\gamma_{z_0,z} : [0,1] \to \mathbb{C}$.
Definiere $\left(F(w) := \int\limits_{\gamma_{z_0,w}} f(z)\,dz\right) : G \to \mathbb{C}$

Z.z. F ist holomorph und $F' = f$.
Sei $w \in G$ und $h \in \mathbb{C}$ mit $B_{|h|}(w) \subset G$.
Betrachte

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{\int\limits_{\gamma_{z_0,w+h}} f\,dz - \int\limits_{\gamma_{z_0,w}} f\,dz}{h} \overset{\text{Nach V.}}{=}$$

$$= \frac{\int\limits_{\gamma_{w,w+h}} f\,dz}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 f(w+th)\,h\,dt =$$

$$= \int_0^1 f(w+th)\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} f(w)$$

Beweis der Konvergenz:

$$\left|\int_0^1 f(w+th)\,dt - f(w)\right| = \left|\int_0^1 (f(w+th) - f(w))\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 |f(w+th) - f(w)|\,dt \leq \max_{t\in[0,1]} |f(w+th) - f(w)|$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad \text{nach Stetigkeit}$$

Also $F'(w) = f(w) \quad \forall w \in G$.

II. 2. d. $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ ist harmonisch. Beweis: Rechne $u_{xx} + u_{yy} = 0$. #.

Finde harmonisch konjugierte Funktion v:

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} \iff \begin{cases} v_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2} & (1) \\ v_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

$$v = \int \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} = +\int \frac{-d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} = \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y}\right) + C(y)$$

$$v_y = \frac{\frac{+x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + C'(y) \overset{\cancel{\#}}{=} \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) \overset{\text{Nach (2)}}{=} \frac{x}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow C'(y) = 0$

Man wählt $C(y) = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ \pi & y < 0 \end{cases}$

~~Deshalb~~ Es gibt dann eine stetige harmonische Fortsetzung

$v : \mathbb{C} \setminus \{ z \mid z \in \mathbb{R}, z \geq 0 \} \to \mathbb{R}$.

$$v(z) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y}\right) & y > 0 \\ \pi + \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{y}\right) & y < 0 \\ \cancel{\operatorname{arc}}\tan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\pi}{2} & x > 0. \end{cases} = \operatorname{Arg}(z) \in (0, 2\pi)$$

Dann $f = (u + iv) : \mathbb{C} \setminus \{ z \mid z \in \mathbb{R}, z \geq 0 \} \to \mathbb{R}$

ist holomorph und

$$f(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) = \ln z$$

II.3.a Sei $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ stetig mit
$(f(z))^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$.

Erste Methode:

$$(f(z))^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow (f(z^2))^2 = z^2$$

$$\Rightarrow f(z^2) = \varepsilon(z) \cdot z \quad \text{wobei } \varepsilon(z) \in \{-1, 1\} \ \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\varepsilon(z) = \frac{f(z^2)}{z} \text{ - stetig} \Rightarrow \varepsilon(z) \text{ ist eine Konstante auf } \mathbb{C}^*$$

Also $f(z^2) = \varepsilon \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

Nimm $z = 1 \Rightarrow f(1) = \varepsilon$
Nimm $z = -1 \Rightarrow f(1) = -\varepsilon$ Widerspruch. #

Zweite Methode:

$$(f(z))^2 = z \Rightarrow (f(e^{it}))^2 = e^{it} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(e^{it}) = e^{it/2 + ik\pi}$$ $k \in \mathbb{Z}$ ist Konstante nach Stetigkeit.

Dann $f(e^{i0}) = e^{i0 + ik\pi} = e^{ik\pi} = f(1)$

$$f(1) = f(e^{i2\pi}) = e^{i\pi + ik\pi} = e^{i(k+1)\pi} = -e^{ik\pi} = -f(1)$$

Widerspruch! #

$\underline{\text{II}.\ 3.\ 6.}$ $\quad f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ - holomorph.

$z_0 \in D \quad f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow d_{z_0} f$ - komplex lineár

und $\neq 0 \Rightarrow d_{z_0} f$ - konform. $\boxed{\langle d_{z_0} f(u), d_{z_0}(v) \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \lambda > 0}$

$\left(\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D\right) \in C^1$ und

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle}{|\gamma_1'(0)| \cdot |\gamma_2'(0)|}.$$

$$\cos\tilde{\alpha} = \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0) \rangle}{|c'(0)| \cdot |c_2'(0)|} =$$

$$= \frac{\langle d_{z_0} f(\gamma_1'(0)), d_{z_0} f(\gamma_1'(0)) \rangle}{\left(\langle d_{z_0} f(\gamma_1'(0)), d_{z_0} f(\gamma_1'(0)) \rangle \langle d_{z_0} f(\gamma_2'(0)), d_{z_0} f(\gamma_2'(0)) \rangle\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda \langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle}{\left(\lambda^2 \langle \gamma_1'(0), \gamma_1'(0) \rangle \langle \gamma_2'(0), \gamma_2'(0) \rangle\right)^{1/2}} =$$

$$\frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle}{|\gamma_1'(0)| \cdot |\gamma_2'(0)|} = \cos\alpha$$

De $\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha}$

II.3.e • Sei $z \in \mathbb{H}$ dann

$\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow z = |z| \cdot e^{i\theta} \quad \theta \in (0, \pi)$

$\Rightarrow z^2 = |z|^2 e^{i2\theta} \quad 2\theta \in (0, 2\pi)$.

$\Rightarrow z^2 \in \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$

• Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow w = |w| \cdot e^{i\theta}$

$\theta \in (0, 2\pi)$ Nimm $z = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{H}$

Man rechnet, dass $z^2 = w$.

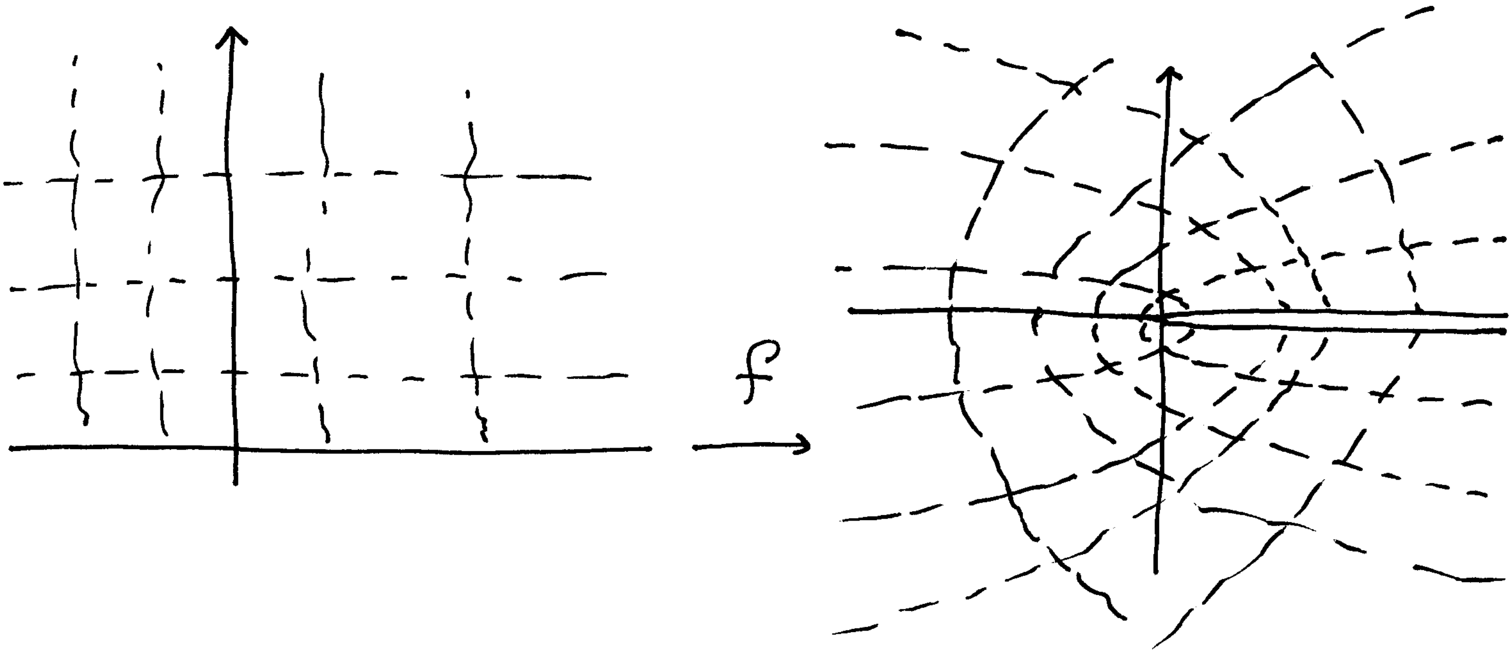
Also $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine

bijektive Abbildung.

$f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$

y-fest: $u = \left(\frac{v}{2y}\right)^2 - y^2$

x-fest: $u = x^2 - \left(\frac{v}{2x}\right)^2$



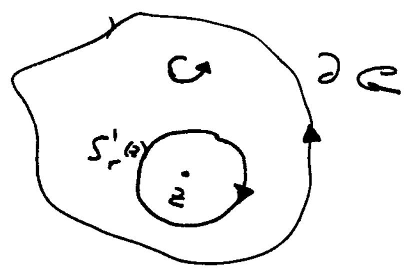
II.4.a. Sei $r > 0$ ist so, dass $\overline{B}_r(z) \subset \mathring{G}$

Betrachte $G' = G \setminus B_r(z)$

Dann $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$ ist holomorph auf G'

$\Rightarrow$ $f(\zeta)\,d\zeta$ ist eine geschlossene 1-Form. auf G'

$\Rightarrow$ $\int_{\partial G'} f(\zeta)\,d\zeta = 0$ Nach Gauß ~~Thm~~. Satz.



$\partial G' = \partial G \cup S^1_r(z)$

$$\Rightarrow \int_{\partial G} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{(S^1_r(z),\, G)} f(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \int_{S^1_r(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}} = 2\pi i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \zeta = z + e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ d\zeta = i e^{i\theta}\,d\theta \end{array}}$$

II.4. b. $p(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z^2+1) =$

$= (z-1)(z+i)(z-i)$

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$

$$1 = (z^2+1)A + (z-1)(z-i)B + (z-1)(z+i)C$$

$z=1$:

$1 = 2A \qquad A = \frac{1}{2}$

$z=i$: $1 = (i-1)(2i)C \qquad C = \frac{-2+2i}{8} = \frac{-1+i}{4}$

$z=-i$: $1 = (-i-1)(-2i)B \qquad B = \frac{1+i}{4}$

Sei $\varepsilon = \frac{1}{100}$; $\frac{1}{p(z)}$ ist holomorph

auf $G \setminus \left(B_\varepsilon(1) \cup B_\varepsilon(i) \cup \cancel{B_\varepsilon(-i)} \right) = G'$

Also $\int_{\partial G'} \frac{dz}{p(z)} = 0 \Rightarrow \int_{\partial G} \frac{dz}{p(z)} =$

$$= \int_{S'_\varepsilon(1)} \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i} \right) dz +$$

$$\int_{S'_\varepsilon(i)} \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i} \right) dz =$$

$$= \int_{S^1_\varepsilon(1)} \frac{A\,dz}{z-1}\,dz + \int_{S^1_\varepsilon(i)} \frac{C\,dz}{z-i} = 2\pi i(A+C)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2} + \frac{-1+i}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi(-1+i)$$