Serie 1

1. **a)** Zeige, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{C} \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

ein injektiver Ring-Homomorphismus ist. *2 Punkte*

b) Sei $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Zeige: $\varphi \neq 0$ ist konform genau dann, wenn φ entweder komplex linear oder komplex antilinear ist. *2 Punkte*

2. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Zeige: f ist genau dann in $z_o \in D$ komplex differenzierbar, wenn f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ in z_o reell differenzierbar ist und das Differential $Df(z_o) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ komplex linear ist. *4 Punkte*

3. **a)** Es sei $S^2 = \{\, (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\} \subset \mathbb{R}^3$ und $p\colon \mathbb{C} \to S^2$ die folgendermaßen definierte Abbildung: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ sei $l_z \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade durch $(0, 0, 1)$ und $(x, y, 0)$ mit $z = x + iy$. Dann sei $p(z) = l_z \cap S^2$. *Bestimme* die Koordinatenfunktionen von p und berechne die Umkehrabbildung $p^{-1}\colon S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{C}$. (*Zur Erinnerung: p^{-1} liefert einen Homöomorphismus zwischen $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ und $\mathbb{C}$. Man bezeichnet S^2 auch als die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^2$ und als die* **Riemannsche Zahlenkugel***, und man schreibt manchmal $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{C}}$*) *2 Punkte*

b) *Zeige:* Die folgenden Funktionen $f(z)$ lassen sich mittels p in eindeutiger Weise mit stetigen Abbildungen $\tilde{f}\colon S^2 \to S^2$ identifizieren, so daß $\tilde{f} = p \circ f \circ p^{-1}$ (wo jeweils der Ausdruck definiert ist), und *bestimme* $\tilde{f}$:

$$f(z) = \frac{1}{z},\ f(z) = z^2,\ f(z) = \bar{z},\ f(z) = \frac{1}{z - i}\,.$$

2 Punkte

4. **a)** *1 Punkt* Es sei $\mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ die obere Halbebene. *Zeige*: $z \in \mathbb{H} \Leftrightarrow -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$.

b) *3 Punkte* Man finde eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

welche $\mathbb{H}$ bijektiv auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \,\}$ abbildet. (Man bestimme natürlich auch φ^{-1}!)

Rückgabe: In den Kasten am 15.04.

I.1.a $\varphi : \mathbb{C} \to M(2\times 2, \mathbb{R})$, $a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Z.z. 1. $\varphi((a+bi)+(c+di)) = \varphi(a+bi)+\varphi(c+di)$

...

2. $\varphi((a+ib)(c+id)) = \varphi(a+ib)\varphi(c+id)$

...

3. $\varphi(1+i0) = id \in gl_2 \mathbb{R}$

...

I.1.b Hilfsatz: Unter Identifiezierung

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto z = x+iy$ gilt $\langle z_1, z_2 \rangle = Re(z_1 \bar{z}_2)$

Beweis: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 =$

$= Re((x_1+iy_1)(x_2-iy_2))$ #.

- Sei $A \neq 0$ komplex linear.

$\langle Az_1, Az_2 \rangle = \langle z_1(A1), z_2(A1) \rangle =$

$= Re(z_1(A1)\cdot \bar{z}_2(\overline{A1})) = |A1|^2 \, Re\, z_1 \bar{z}_2 =$

$= |A1|^2 \langle z_1, z_2 \rangle \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow A$ ist konform.

- Analog bei A-antikomplex linear.
- Sei $A \neq 0$ konform $\Rightarrow \langle Aw, Au \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Betrachte $w \in \mathbb{R}$ Dann $\langle A(iw), Aw \rangle =$

$\lambda \langle iw, w \rangle = 0 \Rightarrow Aiw \perp Aw$. (*)

$\langle Aiw, Aiw \rangle = \lambda \langle iv, iv \rangle = \lambda \langle w, w \rangle = \langle Aw, Aw \rangle$

$\Rightarrow |A(iw)| = |Aw|$ (**)

$(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow$ $A(iv) = \varepsilon(v)\, i\, Av$

Wobei $\varepsilon(v) \in \{\pm 1\}$

Nach ~~stetigkeit~~ ist $\varepsilon(v)$ eine Konstante bzgl v.

$\Rightarrow$ $Aiv = \pm i\, Av \;\forall v \Rightarrow$ A ist Komplex lin.

oder antikomplex lin. #

I. 2.

$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z_0 \in D \qquad \left|\; \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xleftrightarrow{\cong} \mathbb{C} \\ \binom{a}{b} \longleftrightarrow a+ib \end{array}\right.$

f - komplex diff'bar auf $z_0 \iff \exists\, w = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z)}{h}$

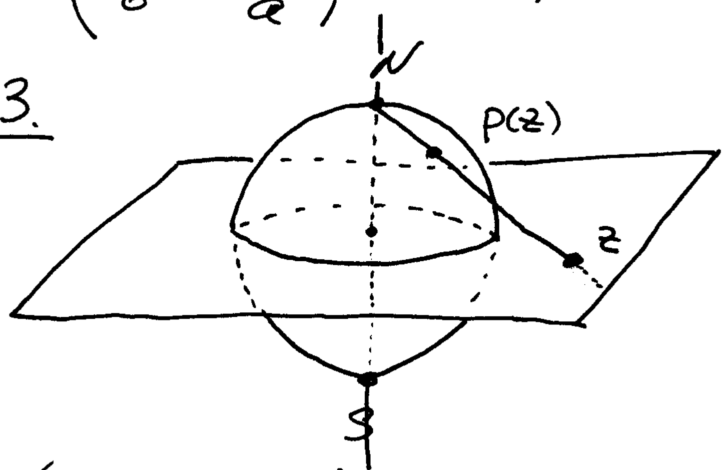
$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z) - w\cdot h}{|h|} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z) - \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w & -\operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{|h|} = 0$$

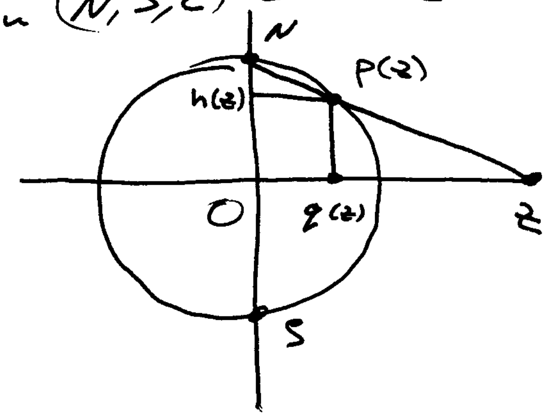
$\iff f$ - $\mathbb{R}$-diff'bar und $d_{z_0} f = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w & -\operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ - komplex linear.

I. 3.



In (N, S, z) Ebene



$\Delta(z, q(z), p(z)) \sim \Delta(z, 0, N) \qquad q(z) = \lambda z,\ \lambda > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{|z| - |q(z)|}{|z|} = \dfrac{|h(z)|}{1} \\[2ex] |q(z)|^2 + |h(z)|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(z) = \dfrac{2z}{|z|^2+1} \\[2ex] h(z) = \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \end{cases}$$

Also $p(z) = \dfrac{1}{|z|^2+1} \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} z \\ 2\operatorname{Im} z \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix}$

$$p^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \frac{x}{1-t} + i\frac{y}{1-t}.$$

Man betrachtet auch $p_s : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{\cancel{S}\}$

Zu jedem $\cancel{z}\, w \in \mathbb{C}$ sei ℓ'_w die ~~Strahl~~ durch S und $(x, y, 0)$ mit $w = x - iy$, $p_s(w) := \ell'_w \cap S^2$

Dann $$p_s(w) = \frac{1}{|w|^2+1}\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} w \\ -2\operatorname{Im} w \\ 1-|w|^2 \end{pmatrix}.$$

$$p_s^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \frac{x}{t+1} - i\frac{y}{t+1}.$$

Man rechnet $p_s^{-1} \circ p(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$

Also man hat eine komplexe Koordinate z auf $S^2 \setminus \{N\}$ und Koordinate w auf $S^2 \setminus \{S\}$. Es gilt $w = \frac{1}{z}$ auf $S^2 \setminus \{N, S\}$

- Sei $[z : w] := \{(\lambda z, \lambda w) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ für $z, w \in \mathbb{C}$

Definiere $\mathbb{C}P^1 := \{[z : w] \mid z \neq 0 \text{ oder } w \neq 0\}$.

Es gibt ein Homöomorphismus

$$F : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow S^2$$

$$F[z : w] := \begin{cases} p\left(\frac{z}{w}\right) & w \neq 0 \\ p_s\left(\frac{w}{z}\right) & z \neq 0. \end{cases}$$

F ist wohldefiniert, da $p(z) = p_s\left(\frac{1}{z}\right)\ \forall z \in \mathbb{C}^*$

$$F^{-1}(A) = \begin{cases} [p^{-1}(A) : 1] & A \neq N \\ [1 : p_s^{-1}(A)] & A \neq S. \end{cases}$$

I. 3. 6. i) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ hat eine stetige Fortsetzung auf $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$

$$S^2\setminus\{N\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \xmapsto{p^{-1}} \frac{x}{1-t} + i\frac{y}{1-t} \xmapsto{\frac{1}{z}} \frac{(1-t)^2}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{1-t} - i\frac{y}{1-t}\right)$$

$$= \frac{(1-t)}{x^2+y^2}(x-iy) \xmapsto{p} \frac{1}{\frac{(x^2+y^2)(1-t)^2}{(x^2+y^2)^2}+1}\begin{pmatrix} \frac{2(1-t)x}{x^2+y^2} \\ \frac{2(1-t)y}{x^2+y^2} \\ \frac{(x^2+y^2)(1-t)^2}{(x^2+y^2)^2}-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -t \end{pmatrix}$$ - hat eine stetige Fortsetzung auf S^2.

ii) Mit homogen Koordinaten.

$$S^2\setminus\{N\} \ni [z:w] \xmapsto{p^{-1}} \frac{z}{w} \xmapsto{\cdot^2} \frac{z^2}{w^2} \xmapsto{p^{-1}} \left[\frac{z^2}{w^2} : 1\right]$$

$= [z^2 : w^2]$ - definiert auf $S^2 = \mathbb{C}P^1$

iii) $$S^2\setminus\{N\} \ni [z:w] \xmapsto{p^{-1}} \frac{z}{w} \xmapsto{\bar{\cdot}} \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \xmapsto{p^{-1}} \left[\frac{\bar{z}}{\bar{w}} : 1\right]$$

$= [\bar{z} : \bar{w}]$ wohldefiniert auf ganzem $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$

iv) $$[z:w] \xrightarrow{p^{-1}} \frac{z}{w} \xmapsto{\frac{1}{\cdot - i}} \frac{1}{\frac{z}{w} - i} = \frac{w}{z-iw} \xmapsto{p}$$

$\left[\frac{w}{z-iw} : 1\right] = [w : z-iw]$ Wohldef. auf ganzem $\mathbb{C}P^1$

I.4.a $\quad -\frac{1}{z} \in \mathbb{H} \iff \operatorname{Im}\left(\frac{-1}{z}\right) > 0 \iff$

$$\operatorname{Im} \frac{-\bar{z}}{|z|^2} > 0 \iff \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} > 0 \iff \operatorname{Im} z > 0$$

$\iff z \in \mathbb{H}.$

I.4.b $\quad$ Sei $\varphi(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

Sei $z \in \mathbb{H}$ dann $\operatorname{Im} z > 0$

dann $$\left| \frac{iz+1}{z+i} \right|^2 = \frac{(1-\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2}{(\operatorname{Im} z + 1)^2 + (\operatorname{Re} z)^2} < 1$$

$\Rightarrow \varphi(z) \in \mathbb{E}$

Finde φ^{-1}: $\quad \frac{iz+1}{z+i} = w \Rightarrow iz - wz = iw - 1$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(w) = z = \frac{iw-1}{-w+i} = \frac{w+i}{iw+1}$$

Sei $w \in \mathbb{E}$ dann $|w|^2 < 1 \Rightarrow$

$$\operatorname{Im} \frac{w+i}{iw+1} = \operatorname{Im} \frac{(w+i)(-i\bar{w}+1)}{|iw+1|^2} = \frac{\operatorname{Im}\left(i(1-|w|^2) + 2\operatorname{Re} w\right)}{|iw+1|^2}$$

$$= \frac{1-|w|^2}{|iw+1|^2} > 0 \Rightarrow \varphi(w) \in \mathbb{H} \Rightarrow$$

φ bildet $\mathbb{H}$ bijektiv auf $\mathbb{E}$ ab.