Serie 9

1. **a)** Man berechne die folgenden Residuen

$$\mathrm{res}_0 \frac{z^{2n-1}}{1-\cos^n z}, \quad \mathrm{res}_0 \frac{z^3}{\sin z(\sin z - z)},$$

wobei Log der Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ist. *2 Punkte*

b) Bestimme die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

(ii) $z^6 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $|z| < 1$,

(iii) $z^6 + iz^2 - 4z + i$ in $1 < |z| < 2$.

2 Punkte

2. **a)** Berechne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^n + 1} dx$$

2 Punkte

b) Finde alle holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $f(0) = 0$ und $f(f(f(f(z)))) = z$. *2 Punkte*

3. Finde im folgenden konforme Abbildungen zwischen den gegebenen Gebieten G und G' und bestimme auch die inverse Abbildung:

a) $G = \{ z \mid -\pi/2 < \mathrm{Im}\, z < \pi/2 \}$, $G' = \mathbb{E}$.

b) $G = \mathbb{C} \setminus \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1 \}$, $G' = \mathbb{H}$.

c) $G = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \in (-\pi/2, \pi/2) \}$, $G' = \mathbb{C} \setminus \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1 \}$.

4. **a)** Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin G$ existiert ein Zweig von $z^{\frac{1}{n}}$. *2 Punkte*

b) Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\{ |z| \leq 1 \} \subset U$, U offen in $\mathbb{C}$. Es gelte $|f(z)| < 1$ für alle $|z| = 1$. *Zeige*: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in $\mathbb{E} = \{|z| < 1\}$, und f hat genau einen Fixpunkt in $\mathbb{E}$. *2 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 10.06.