Serie 8

1. Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

a) *Zeige*: Es existiert auf G ein Zweig des Logarithmus. *2 Punkte*

b) *Zeige*: Es existiert auf G ein Zweig der Wurzelfunktion, d.h. $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $\big(g(z)\big)^2 = z$ f.a. $z \in G$. *2 Punkte*.

2. a) *Zeige*: Jede komplexe Möbiustranformation $\varphi \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ lässt sich als eine endliche Komposition $\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n$ aus Transformationen φ_i vom Typ Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$, Translation $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$ und Drehstreckung $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}$ zusammensetzen. *2 Punkte*

b) *Zeige*: Die Gruppen $PSL(2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sind isomorph. *2 Punkte*

3. a) Es seien zwei Kreisbögen k_1 und k_2 in der komplexen Zahlenebene gegeben, so daß sich k_1 und k_2 in zwei Punkten schneiden, also ein sogenanntes Kreisbogenzweieck bilden. Finde eine konforme Abbildung, die das Innere dieses Zweiecks auf die obere Halbebene abbildet. *2 Punkte*

b) Finde eine konforme Abbildung des Gebiets $\{|z| < 1\}$ auf das Gebiet $\{\,\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ und bestimme auch die inverse Abbildung. *2 Punkte*

4. Es seien r paarweise verschiedene Punkte $z_1, \ldots, z_r \in \hat{\mathbb{C}}$ gegeben und es sei $G = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$. Bestimme $\mathrm{Aut}(G)$ explizit und vollständig für $r = 2, 3, 4$. *4 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 03.06.