Serie 7

1. Bestimme die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

(i) $2z^4 - 5z + 2$ in $|z| > 1$,

(ii) $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $|z| < 1$,

(iii) $z^5 + iz^3 - 4z + i$ in $1 < |z| < 2$.

4 Punkte

2. **a)** Es sei $\lambda > 1$. Zeige, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\mathrm{Re}\, z > 0$ genau eine Lösung hat, und daß diese außerdem reell ist. *2 Punkte*

b) Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ für $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_o \in U$. z_o sei eine w_o-Stelle von f der Ordnung $k > 1$. *Zeige*: Es gibt eine biholomorphe Abbildung h in einer Umgebung von z_o, so daß f lokal bei z_o ausgedrückt werden kann als Komposition von h, Potenzfunktion $\zeta \mapsto \zeta^k$ und Translation $w \mapsto w + w_o$. *2 Punkte*

3. *Zeige*: Jede Möbiustransformation $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ bildet Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden ab. *4 Punkte*

4. **a)** Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\{\, |z| \leq 1 \,\} \subset U$, U offen in $\mathbb{C}$. Es gelte $|f(z)| < 1$ für alle $|z| = 1$. *Zeige*: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in $\mathbb{E} = \{|z| < 1\}$, und f hat genau einen Fixpunkt in $\mathbb{E}$. *2 Punkte*

b) Berechne

$$\int_{-infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)} .$$

2 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 27.05.