

Serie 7

1. Bestimme die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

- (i) $2z^4 - 5z + 2$ in $|z| > 1$,
- (ii) $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $|z| < 1$,
- (iii) $z^5 + iz^3 - 4z + i$ in $1 < |z| < 2$.

4 Punkte

2. a) Es sei $\lambda > 1$. Zeige, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ genau eine Lösung hat, und daß diese außerdem reell ist.

2 Punkte

b) Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ für $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_o \in U$. z_o sei eine w_o -Stelle von f der Ordnung $k > 1$. Zeige: Es gibt eine biholomorphe Abbildung h in einer Umgebung von z_o , so daß f lokal bei z_o ausgedrückt werden kann als Komposition von h , Potenzfunktion $\zeta \mapsto \zeta^k$ und Translation $w \mapsto w + w_o$.

2 Punkte

3. Zeige: Jede Möbiustransformation $T \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{C})$ bildet Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden ab.

4 Punkte

4. a) Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\{|z| \leq 1\} \subset U$, U offen in \mathbb{C} . Es gelte $|f(z)| < 1$ für alle $|z| = 1$. Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $f(z) = z^n$ genau n Lösungen in $\mathbb{E} = \{|z| < 1\}$, und f hat genau einen Fixpunkt in \mathbb{E} .

2 Punkte

b) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)}.$$

2 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 27.05.