Serie 6

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und $a, b \in \mathbb{C}\setminus U$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente.
Zeige: Es existiert eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\big(f(z)\big)^2 \;=\; (z-a)(z-b) \quad \text{f.a. } z \in U\,.$$

4 Punkte

2. **a)** Berechne den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

$$\tfrac{z-1}{\sin^2 z} \text{ für } 0<|z|<\pi, \qquad \frac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2} \text{ für } 0<|z-ib|<2b,\ b>0$$

2 Punkte

b) Für folgende Funktionen f und Punkte z_o bestimme man die Art der Singularität von f in z_o. Bei hebbaren Singularitäten bestimme man den Grenzwert von f, für Pole gebe man den Hauptteil an:

$$\tfrac{1}{1-e^z} \text{ in } z_o=0, \qquad \frac{\cos z-1}{z^6} \text{ in } z_o=0,$$
$$\cos\left(\tfrac{1}{z}\right) \text{ in } z_o=0, \qquad \sin(\pi/(z^2+1)) \text{ in } z_0=i\,.$$

2 Punkte

3. **a)** Man berechne die folgenden Residuen

$\operatorname{res}_0 \frac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, $\operatorname{res}_0 \frac{\sin 2z-2\sin z}{\sin z(\sin z-z)}$,

$\operatorname{res}_0 \frac{\tan z-z}{(1-\cos z)^2}$, $\operatorname{res}_0 \frac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)}$,

wobei Log der Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ ist. *2 Punkte*

b) Es sei f holomorph in einer Umgebung von z_o, es gelte $f'(z_o)\neq 0$, und die Funktion g habe einen Pol 1. Ordnung in $w_o = f(z_o)$. Drücke $\operatorname{res}_{z_o} g\circ f$ durch $\operatorname{res}_{w_o} g$ aus. *2 Punkte*

4. Berechne:

$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{1-2a\cos t+a^2}\,dt,\ a\in\mathbb{R}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n},\ a,b>0,\ n\in\mathbb{N}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx,\ a>0$

$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx,$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-\pi i x/2}}{x^2-2x+5}\,dx\,.$

4 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 20.05.