Serie 5

1. Sei $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$.

a) Bestimme die Laurentreihendarstellung um $z_o = 0$ für alle in Frage kommenden Kreisringgebiete. *3 Punkte*

b) Bestimme alle Residuen von f. *1 Punkt*

2. Finde für folgende Funktionen alle Pole und Nullstellen und bestimme ihre Ordnungen (*je 1/2 Punkt*):

(a)	$\frac{1}{(z+3)(z^2+4)}$	**(b)**	$\sin z - z$	**(c)**	$\sin\frac{1}{z} - \frac{1}{z}$	**(d)**	$\frac{1}{\sin z - z}$
(e)	$\frac{1}{e^z-1}$	**(f)**	$\frac{\sin z}{\cos z - 1}$	**(g)**	$\frac{\sin \pi z}{z+1}$	**(h)**	$e^z - 1 - z$

3. Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine nicht-konstante ganze Funktion. *Zeige*: Die Wertemenge $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ ist dicht. *4 Punkte*

4. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und $a, b \in \mathbb{C}\setminus U$ liegen in derselben Zusammenhangskomponente.

a) Betrachte $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$. *Zeige*: $\frac{g'}{g} \in \mathcal{O}(U)$ hat eine Stammfunktion in u. *2 Punkte*

b) *Zeige*: Es existiert eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b} \quad \text{f.a. } z \in U\,.$$

2 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 13.05.