Serie 4

1. **a)** Es sei $\Gamma \in Z_1(\mathbb{C})$ ein 1-Zykel. *Zeige*: Es existieren geschlossene Integrationswege $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ (nicht notw. verschieden), so dass

$$\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{sp} \gamma_i \;=\; \operatorname{sp} \Gamma \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) = \sum_{i=1}^{r} n(\gamma_i, z)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} \Gamma$. *2 Punkte*

b) Es seien $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. *Zeige*:

$$H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}) \;\cong\; \mathbb{Z}^k \,.$$

2 Punkte

2. **a)** Berechne $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$ für $|a| < r < |b|$ mit $m, n \geq 1$. *2 Punkte*

b) Berechne $\oint_{|z|=r} f(z) dz$ für $f(z) = \frac{z^2+(1-2i)z-2}{z^3-(1+2i)z^2+(2i-1)z+1}$ und für alle $r \neq 1$. *2 Punkte*

3. **a)** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade in der Ebene $\mathbb{C}$. Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U \setminus L$ holomorph. Zeige, daß f auf ganz U holomorph ist. *2 Punkte* *2 Punkte*

b) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $z \in G \Leftrightarrow \bar{z} \in G$, d.h. symmetrisch zur reellen Achse. Es sei $f\colon \{\, z \in G \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \,\} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\{\, z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ holomorph, sowie $f(\mathbb{R} \cap G) \subset \mathbb{R}$. Zeige, daß durch

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

eine auf G holomorphe Funktion definiert wird. Diese Methode heißt **Schwarzsches Spiegelungsprinzip** nach Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). *2 Punkte*

4. **a)** Entscheide und begründe, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind:

$$\frac{z}{e^z - 1}, \quad z^2 \sin \frac{1}{z} \,.$$

2 Punkte

b) Es sei $f\colon B_r(0) \to B_R(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. *Zeige*:

$$|f(z)| \leq \frac{R}{r} |z| \,.$$

Hinweis: Schwarzsches Lemma *2 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 06.05.