Serie 3

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_o \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: *4 Punkte*

- f hat in z_o eine Nullstelle mit $\operatorname{ord}_{z_o} f = n$,
- $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_o)^k$ mit positivem Konvergenzradius und $a_n \neq 0$,
- ex. $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_o))$ für ein $\varepsilon > 0$ mit $g(z_o) \neq 0$ und $f(z) = g(z)(z - z_o)^n$.

2. Zeige für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ auf einem Gebiet G:

a) Wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f(z) = c \cdot \bar{f}(z)$ f.a. $z \in G$, dann ist f konstant. *1 Punkt*

b) Wenn $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $g \circ f$ ist konstant, dann ist f oder g konstant. *1 Punkt*

c) Wenn $f_1, \ldots, f_N$ auf G holomorph sind und $|f_1|^2 + \ldots + |f_N|^2$ ist konstant, dann ist jedes f_j konstant. *2 Punkte*

3. *Aufgabe zu den Logarithmus-Funktionen*: Es sei $D \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $l\colon D \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\exp l(z) = z$ für alle $z \in D$ heißt ein **stetiger Zweig des Logarithmus**. *Zeige (je 1 Punkt)*:

a) Je zwei stetige Zweige $l, \tilde{l}$ des Logarithmus haben die Eigenschaft $\tilde{l} = l + 2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

b) Jeder stetige Zweig l des Logarithmus ist holomorph, $l \in \mathcal{O}(D)$, und es gilt $l'(z) = \frac{1}{z}$.

c) Auf D existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus, wenn die Funktion $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf D hat.

d) Man konstruiere zwei Gebiete D_1 und D_2 und stetige Zweige $l_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$, $l_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$ des Logarithmus, so daß ihre Differenz auf $D_1 \cap D_2$ nichtkonstant ist.

4. Betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Diese Abbildung ist nicht injektiv (da $f(z) = f(\frac{1}{z})$) aber konform auf $\mathbb{C}^\times$, d.h. das Differential $Df(z)$ in jedem Punkt mit $f'(z) \neq 0$ eine konforme lineare Abbildung. *Zeige (je 1 Punkt)*:

a) Das Bild der Kreislinie $S_r := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \}$, $r > 0$, unter f ist

(i) im Fall $r \neq 1$ eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 und Halbachsen $\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ bzw. $\frac{1}{2}|r - \frac{1}{r}|$,

(ii) $f(S_1) = [-1, 1]$.

b) Das Bild einer Halbgeraden $r \mapsto re^{i\phi}$, $r > 0$ ($\phi \notin \{0, \pm\pi/2, \pi\}$, ϕ fest) ist ein Ast einer Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1.

Bitten wenden!

c) Es seien $D_1 := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1 \,\}$ und $D_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1 \,\}$. Dann bilden $f_{|D_1}$ und $f_{|D_2}$ jeweils diese Mengen konform auf die sogenannte längs der reellen Achse von -1 bis 1 geschlitzte Ebene ab, d.h. auf

$$\mathbb{C} \setminus \{\, t \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq t \leq 1 \,\}\,.$$

d) Skizziere das Bild eines hinreichend feinen "Gitters" aus x- und y-achsenparallelen Geraden unter der Abbildung f.

Rückgabe: In den Kasten am 29.04.