Serie 2

1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
Beweise den Satz aus der Vorlesung: f hat eine Stammfunktion auf $G \Leftrightarrow$

$$\oint_{\partial\triangle} f(z)dz = 0 \quad \text{f.a. } \triangle(z_1, z_2, z_3) \subset G\,.$$

2. Entscheide, ob folgende reellwertige Funktionen $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ auf Gebieten $D \subset \mathbb{C}$ Realteil einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ sind und wenn ja, bestimme f:

a) $\varphi(x, y) = (x \cos y - y \sin y)e^x$ auf $D = \mathbb{C}$.

b) $\varphi(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ auf $D = \mathbb{C}^x$.

c) $\varphi(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ auf $D_\varepsilon = \{(x, y) \neq 0 \,|\, \arctan(y/x) \in (\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon)\}$ für beliebiges $0 < \varepsilon < \pi$.

d) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ auf $D = \mathbb{C}^x$.

3. **a)** *Zeige*: Es gibt keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $(f(z))^2 = z$ f.a. $z \in \mathbb{C}^x$. *2 Punkte*

b) Es seien $f\colon \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z_o \in D$ mit $f(z_o) \neq 0$ und $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ zwei stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_o$. Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen $\dot\gamma_1(0)$ und $\dot\gamma_2(0)$. Berechne den Winkel $\tilde\alpha$ zwischen $\dot c_1(0)$ und $\dot c_2(0)$, wobei $c_j = f \circ \gamma_j$, $j = 1, 2$. Warum kann man f auch als eine konforme Abbildung bezeichnen? *1 Punkt*

c) Für folgende komplexe Funktionen $f\colon \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ bestimme man $f(D) \subset \mathbb{C}$ und man skizziere die Bildkurven unter f der achsenparallelen Geraden in D, d.h. $\{(x, y) \in D \,|\, x \text{ oder } y \text{ konstant}\}$.

- $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0 \,\}$. *1 Punkt*

4. **a)** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass der Rand durch einen einfach geschlossenen Integrationsweg γ gegen den Uhrzeigersinn parametrisiert wird, $\partial G = \operatorname{sp} \gamma$. *Zeige* ohne Verwendung der Cauchy-Integralformel, dass $\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ für alle $z \in G$ gilt. 2 *Punkte*

b) Es sei nun $G = (-3, 3) \times (0, 3)$ und $p(z) = z^3 - z^2 + 2z - 1$. Berechne

$$\oint_{\partial G} \frac{dz}{p(z)}\,.$$

2 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 22.04.