Serie 12

1. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\})$ mit $f(z+1) = z \cdot f(z)$ f.a. $z \notin \{0, -1, \ldots\}$. *Zeige*:

a) f hat in $-n$, $n \in \mathbb{N}_o$ Pole erster Ordnung.

b) Berechne $\operatorname{res}_{-n} f$, $n \in \mathbb{N}_o$.

2. a) Es sei $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $H(z) := h(z) \cdot h(1-z)$. *Zeige*: Falls $H(z) = 0$ f.a. $\operatorname{Re} z = 0$, so folgt $h \equiv 0$. Gilt dies auch für beliebige $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$? Begründe!

b) Für alle $|z| < 1$ mit

$$1 + z = r\, e^{i\vartheta}, \quad r \in (0,2),\ \vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

gilt $\log r + i\vartheta = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$.

3. a) Was für eine Singularität hat die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ in $z = 0$? Begründe! Bestimme $f(\mathbb{C}^*)$.

b) Bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ in $z_o = 0$.

c) Bestimme alle $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit f bijektiv und f^{-1} stetig.

4. Beweise mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Rückgabe: keine offizielle Rückgabe, individueller Übungszettel