Serie 11

1. **a)** Es seien $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{ix}$ und $f\colon S^1 \to S^1$ stetig, $f \neq \text{const}$. *Zeige*: Falls $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ g = f \circ p$, so ist $\frac{g(2\pi) - g(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. *2 Punkte*

b) Sei $\alpha > 0$ und $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = z^\alpha$ f.a. $z \in \mathbb{C}^*$. *Zeige*: Dann ist $\alpha \in \mathbb{N}$. Folgere: Es gibt keinen Zweig der n-ten Wurzel $z^{\frac{1}{n}}$ auf $\mathbb{C}^*$. *2 Punkte*

2. Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, $z_o \in \mathbb{C}^*$ und $T_{z_o}f$ die Taylorreihe von f in z_o.

a) *Zeige*: $T_{z_o}f$ hat einen Konvergenzradius $R \geq |z_o|$. *1 Punkt*

b) *Zeige*: Es existieren $z_0, \dots, z_5, z_6 = z_0 \in S^1$ mit $|z_i - z_{i+1}| < 2$ f.a. $0 \leq i \leq 5$ und $f_i \in \mathcal{O}(B_1(z_i))$ mit $f_i(z) = f_{i+1}(z)$ f.a. $z \in B_1(z_i) \cap B_1(z_{i+1})$ sowie $\big(f_i(z)\big)^2 = z$ f.a. $z \in B_1(z_i)$, $i = 0, \dots, 5$. *2 Punkte*

c) Geht das auch mit der Bedingung $f_i(z)^3 = z$, $i = 0, \dots, 5$? Was müsste geändert werden?*1 Punkt*

3. **a)** Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1 + x^4} dx\,.$$

2 Punkte

b) Entscheide, ob folgende Funktion Realteil einer auf einem Gebiet D holomorphen Funktion f ist, und bestimme gegebenenfalls $f \in \mathcal{O}(D)$,

$$\cos(x^2 - y^2)\sinh(2xy)$$

2 Punkte

4. **a)** Berechne $\lim_{R\to\infty} \oint_{B_R(0)} \frac{dz}{z^3 + z^2 + 2z + 2}$. *2 Punkte*

b) Es sei $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung und bezeichne mit $\operatorname{ord}_{z_o} f$ die Nullstellenordnung von f in z_o, falls $f(z_o) = 0$ bzw. die Polstellenordnung, falls $f(z_o) = \infty$. *Zeige*: $\sum_{z \in f^{-1}(w)} \operatorname{ord}_z(f - w)$ ist wohldefiniert und unabhängig von w. *2 Punkte*

Rückgabe: In den Kasten am 24.06.