Serie 10

1. Es sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein gegebenes Gitter.

a) Gibt es eine elliptische Funktion f zu L mit $\operatorname{Ord} f = 2$ und genau zwei einfachen Polen? Begründe! *2 Punkte*

b) Es sei f eine nicht-konstant elliptische Funktion zu L. *Zeige*: f hat mindestens einen Verzweigungspunkt. *2 Punkte*

2. *Zeige*: Jede elliptische Funktion der Ordnung ≤ 2, deren Pole in ihrem Gitter L enthalten sind ist von der Form $a + b\wp$, wobei $\wp$ die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion zu L ist. *4 Punkte*

3. Es sei $\alpha > 0$. *Zeige*: Die Reihe

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_{\{x^2+y^2\geq 1\}} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

endlich ist. *4 Punkte*

4. Es seien $e_1 = \wp(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp(\omega_2/2)$, $e_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ die Halbwerte zum Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. *Zeige*:

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)\,.$$

4 Punkte

Rückgabe: In den Kasten am 17.06.