Serie 1

1. **a)** Zeige, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{C} \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

ein injektiver Ring-Homomorphismus ist. *2 Punkte*

b) Sei $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Zeige: $\varphi \neq 0$ ist konform genau dann, wenn φ entweder komplex linear oder komplex antilinear ist. *2 Punkte*

2. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Zeige: f ist genau dann in $z_o \in D$ komplex differenzierbar, wenn f als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ in z_o reell differenzierbar ist und das Differential $Df(z_o) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ komplex linear ist. *4 Punkte*

3. **a)** Es sei $S^2 = \{\, (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\} \subset \mathbb{R}^3$ und $p\colon \mathbb{C} \to S^2$ die folgendermaßen definierte Abbildung: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ sei $l_z \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade durch $(0, 0, 1)$ und $(x, y, 0)$ mit $z = x + iy$. Dann sei $p(z) = l_z \cap S^2$. *Bestimme* die Koordinatenfunktionen von p und berechne die Umkehrabbildung $p^{-1}\colon S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{C}$. (*Zur Erinnerung: p^{-1} liefert einen Homöomorphismus zwischen $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ und $\mathbb{C}$. Man bezeichnet S^2 auch als die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^2$ und als die* **Riemannsche Zahlenkugel***, und man schreibt manchmal $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{C}}$*) *2 Punkte*

b) *Zeige:* Die folgenden Funktionen $f(z)$ lassen sich mittels p in eindeutiger Weise mit stetigen Abbildungen $\tilde{f}\colon S^2 \to S^2$ identifizieren, so daß $\tilde{f} = p \circ f \circ p^{-1}$ (wo jeweils der Ausdruck definiert ist), und *bestimme* $\tilde{f}$:

$$f(z) = \frac{1}{z},\ f(z) = z^2,\ f(z) = \bar{z},\ f(z) = \frac{1}{z - i}\,.$$

2 Punkte

4. **a)** *1 Punkt* Es sei $\mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ die obere Halbebene. *Zeige*: $z \in \mathbb{H} \Leftrightarrow -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}$.

b) *3 Punkte* Man finde eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

welche $\mathbb{H}$ bijektiv auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\}$ abbildet. (Man bestimme natürlich auch φ^{-1}!)

Rückgabe: In den Kasten am 15.04.