Lösungen zu Serie 4

1.

2. Bestimme die Asymptotenkurven und die Hauptkrümmungslinien auf dem Helicoid

$$f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, cr),\ c > 0\,,$$

und zeige, daß die mittlere Krümmung verschwindet.

Wir berechnen die Hauptkrümmungslinien wie folgt:

$$\begin{aligned}
f_r &= (\cos\phi, \sin\phi, 0),\\
f_\phi &= (-r\sin\phi, r\cos\phi, c),\\
f_r \wedge f_\phi &= (c\sin\phi, -c\cos\phi, r),\\
n &= \frac{1}{\sqrt{c^2+r^2}}(c\sin\phi, -c\cos\phi, r),\\
f_{rr} &= 0,\\
f_{r\phi} &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0),\\
f_{\phi\phi} &= (-r\cos\phi, -r\sin\phi, 0),\\
L = 0, &\quad M = -\frac{c}{\sqrt{c^2+r^2}}, \quad N = 0,\ .
\end{aligned}$$

Der Shape-Operator S ist definiert durch $II(v,w) = I(Sv,w)$, also als Matrix $S = I^{-1}II$ (!), also

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{(c^2+r^2)^{3/2}} \\ -\frac{c}{\sqrt{c^2+r^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte berechnen sich daraus zu $\lambda_\pm = \pm\frac{c}{r^2+c^2}$, und die zugehörigen Eigenvektoren (bis auf skalare Vielfache) zu

$$e_\pm = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{c^2+r^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Differentialgleichungen für die Hauptkrümmungskurven sind also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot r &= \mp\sqrt{r^2+c^2},\\
\dot\phi &= 1
\end{aligned}$$

Mittels Substitution von $r = c\sinh u(t)$ berechnen sich die Lösungen zu

$$\begin{aligned}
r_\pm(t) &= c\sinh(u_o \mp t),\\
\phi(t) &= \phi_o + 1\,.
\end{aligned}$$

Wir finden somit die Hauptkrümmungskurven gegeben als

$$\gamma_\pm = \big(\mp c\sinh t\cos(\phi_o+t), \mp c\sinh t\sin(\phi_o+t), c(\phi_o+t)\big)\,.$$