Serie 9

1. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang.

a) Zeige: Für zwei 1-Formen $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ gilt

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha(X) = \beta(X) \quad \text{f.a. } X \in \mathcal{X}(M)\,.$$

b) Zeige: $\nabla\alpha\colon \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$ mit $(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$ liefert einen wohldefinierten 2-0-Tensor durch $\nabla\alpha(X, Y) = \nabla_X \alpha(Y)$.

c) Zeige: Für alle $f \in C^\infty(M)$ ist ∇df ein symmetrischer 2-0-Tensor.

d) Zeige: Für $p \in \operatorname{Crit} f = \{\, x \in M \mid df(x) = 0 \,\}$ hängt $\nabla df(x)$ nicht von g ab.
Hinweis: Zeige $\nabla df(p)(X(p), Y(p)) = X(Y(f))(p)$ f.a. $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

2. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und es sei $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ die Lie-Klammer mit

$$[X, Y]_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

wobei $X_\alpha = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}$, analog Y_α.

a) Zeige: $([X, Y]_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein wohldefiniertes Vektorfeld.

b) Zeige für alle $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$:

- $X(fg) = fX(g) + gX(f)$,
- $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$,
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$.

c) Berechne $[fX, Y](g)$.

3. Betrachte $\mathbb{C}P^n$ als die Menge aller komplexer Geraden in $\mathbb{C}^{n+1}$, d.h.

$$[v] = \mathbb{C} \cdot v \in \mathbb{C}P^n \quad \text{für} \quad v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\,.$$

Wir haben die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, $v \mapsto [v]$. (Die offenen Mengen in $\mathbb{C}P^n$ sind genau die Bilder offener Mengen aus $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.) Notation: $[(v^0, \ldots, v^n)] = [v^0 : \ldots : v^n]$.

a) Vervollständige die Abbildung

$$\varphi_0\colon V_0 := \{\, [v^0 : \ldots : v^n] \mid v^0 \neq 0 \,\} \to \mathbb{C}^n,$$
$$[v^0 : \ldots : v^n \mapsto (v^1/v^0, \ldots, v^n/v^0)$$

zu einem Atlas auf $\mathbb{C}P^n$. (Zeige, daß dies ein Atlas ist.)

Bitten wenden!

b) Zeige: $S^{2n+1} = \{ (z^0, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1} \,|\, |z^0|^2 + \ldots |z^n|^2 = 1 \}$ ist eine Mannigfaltigkeit.

c) Zeige: $\pi\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $(z^0, \ldots, z^n) \mapsto [z^0 : \ldots : z^n]$ ist eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

4. E sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c\colon [0,1] \to M$ eine geschlossene Kurve, $c(0) = c(1)$, welche sich zu einer Abbildung der Einheitskreisscheibe fortsetzen lässt,

$$u\colon \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1 \} \to M, \quad u(e^{2\pi i t}) = c(t)\,.$$

Zeige, daß der Paralleltransport entlang c $\Phi_c\colon T_{c(0)}M \to T_{c(0)}M$ der Identitätsisomorphismus ist, falls der Riemannsche Krümmungstensor $R(\cdot, \cdot) = 0$ identisch null ist.

Rückgabe: Montag 10.12.07 in der Übung.