Serie 8

1. Es sei S eine Fläche und $p, q \in S$ darauf zwei Punkte. Definiere

$$d(p,q) := \inf\{\, L(c) \,|\, c\colon [a,b] \to S \text{ reguläre Kurve mit } c(a) = p,\ c(b) = q \,\}\,.$$

Zeige: d ist eine Metrik, d.h.

- $d(p,q) \geq 0$ und $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$,
- $d(p,q) = d(q,p)$,
- $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ f.a. $p, q, r \in S$.

2. Zeige, daß die folgenden Mengen Mannigfaltigkeiten sind und berechne ihre Dimension:

a) $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) \;=\; \{\, A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, \det A = 1 \,\}$,

b) $\mathsf{U}(n,\mathbb{C}) \;=\; \{\, A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \,|\, A \cdot A^* = \mathbf{1} \,\}$, mit $(a_{ij})^* = (\bar{a}_{ji})$,

c) $\mathsf{SU}(n) \;=\; \{\, A \in \mathsf{U}(n,\mathbb{C}) \,|\, \det A = 1 \,\}$.

3. **a)** Zeige, daß die Menge der Einheitstangentialvektoren zu S^2, also

$$US^2 \;=\; \{\, (p,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,|\, p \in S^2,\ v \perp p, |v| = 1 \,\}$$

zu $\mathsf{SO}(3)$ homöomorph ist.

b) Finde eine stetige Abbildung $\mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3)$, die surjektiv ist und bei der jedes $a \in \mathsf{SO}(3)$ genau 2 Urbilder hat.

4. **a)** Es sei

$$\mathbf{R}P^n \;=\; \{\, l \subset \mathbb{R}^{n+1} \,|\, l \text{ ist ein 1-dimensionaler Untervektorraum} \,\}$$

der reell projektive Raum. Für $v = (v^0, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $[v^0 : \ldots : v^n] = \mathbb{R} \cdot v \in \mathbb{R}P^n$, und

$$p\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n, \quad v \mapsto [v^0 : \ldots : v^n]\,.$$

Die offenen Mengen in $\mathbb{R}P^n$ sind genau die Teilmengen $U \subset \mathbb{R}P^n$, für die die Urbildmengen $p^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^{n+1}$ sind.

Betrachte die offenen Teilmengen

$$V_i \;=\; \{\, [v^0 : \ldots : v^n] \in \mathbb{R}P^n \,|\, v^i \neq 0 \,\}, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Es seien $\varphi_i\colon V_i \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_i([v^0 : \ldots : v^n]) := (v^0, \ldots, v^{i-1}, v^{i+1}, \ldots, v^n)$.

Zeige, daß die Abbildungen φ_i bijektiv sind, und berechne die Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$.

b) Zeige: Durch die Abbildung $S^n \to \mathbb{R}P^n$, $v \mapsto p(v)$ wird auf $\mathbb{R}P^n$ eine Riemannsche Metrik induziert, so daß diese Abbildung eine lokale Isometrie wird. Berechne die (g^α_{ij}).

Rückgabe: Montag 03.12.07 in der Übung.