Serie 7

1. Betrachte den durch Rotation des Kreises

$$(x-a)^2+z^2=r^2, \quad y=0 \quad (0<r<a)$$

um die z-Achse erzeugten Torus und auf diesem Torus die durch die Punkte $(a+r,0)$, $(a-r,0)$ und (a,r) erzeugten Kurven.

a) Berechne die geodätischen Krümmungen dieser Kurven.

b) Welche dieser Kurven sind geodätisch ?

c) Kannst Du noch weitere geodätische Kurven auf dem Torus angeben?

2. Es sei $U \subset \mathbb{H}$ eine Teilmenge der hyperbolischen Halbebene und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, so daß f eine lokale Isometrie ist (Abwicklung). Verwende die Koordinaten $v=x$ und $u=\ln y$. Es sei dann

$$g\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad g(u,v)=f(u,v)+f_u(u,v)\,.$$

Zeige:

a) Für jedes v ist $u \mapsto f(u,v)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische.

b) f_{uu} steht überall senkrecht auf der Fläche $f(U)$.

c) Die Fläche f hat konstante Gauß-Krümmung -1.

d) $f_{uv}=-f_v+Mn$, $M=h_{12}$ Koeffizient des 2. Fund.tensors.

3. In Fortsetzung von Aufgabe 2 berechne für

$$g\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad g(u,v)=f(u,v)+f_u(u,v)\,.$$

a) Die Koeffizienten des 1. Fundamentaltensors von g.

b) Das Normalenfeld der Fläche g.

c) Die Gaußkrümmung von g.

4. Die Aufgaben 2 und 3 zusammengenommen beschreiben ein Verfahren, wie man aus einer parametrisierten Fläche mit konstanter Gaußkrümmung -1 wieder einer solche Fläche erhalten kann. Dieses Verfahren heißt Bianchi-Transformation.

a) Wende dieses Verfahren auf die Pseudosphäre an und beschreibe, was sich daraus ergibt.

b) Versuche, das Verfahren so zu verwenden, daß sich eine neuartige Fläche mit $K=-1$ finden lässt.

Rückgabe: Montag 26.11.07 in der Übung.