Serie 5

1. **a)** Zeige, daß die Flächenstücke

$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u),$$
$$g(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

gleiche Gauß-Krümmungsfunktionen $K_f(u,v) = K_g(u,v)$ besitzen, aber daß die Identität $(u,v) \mapsto (u,v)$ dennoch keine lokale Isometrie (Abwicklung) beschreibt. Interpretiere dies in Bezug auf das Theorema Egregium.

b) Kann die Sphäre in irgendeiner Umgebung eines Punktes auf die Ebene abgewickelt werden? Warum?

2. **a)** Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück mit einem ersten Fundamentaltensor in der konformen Form

$$I = e^{\varphi}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \text{i.e. } g_{ij} = e^{\varphi}\delta_{ij}\,.$$

Leite die Formel für die Gaußkrümmung her, $K = K(\varphi)$.

b) Es sei f ein Flächenstück, welches auf die hyperbolische Halbebene abwickelbar ist, d.h. $\mathbb{H} = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit $g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$. Berechne K aus der Formel von (a).

c) Wiederhole dies mit einem Flächenstück in der konformen Parametrisierung, so daß $g_{ij} = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$.

3. **a)** Finde eine Abwicklung der Pseudosphäre $\mathbf{S}_{-1}$ auf die hyperbolische Halbebene, d.h. $V \subset \mathbf{H}$ sowie $\phi\colon V \to \mathbb{R}^3$, so daß $\phi(V) = \mathbf{S}_{-1}$ und ϕ eine Isometrie ist. (*Finde erst die geeignete Parametrisierung der Pseudosphäre, siehe Vorl.*)

b) Versuche dies auch mit der Rotationsfläche $f(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$ mit $h(u) = \cosh u$, $g'(u) = \sqrt{2-\cosh^2 u}$.

4. **a)** Betrachte wieder die hyperbolische Halbebene $\mathbf{H}$ wie in 2.) und 3.). Zeige, daß jede Abbildung

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc = 1$ eine Isometrie von $\mathbf{H}$ liefert.

b) Finde einen Diffeomorphismus $\phi\colon \mathbf{H} \to \mathbf{E} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ welche durch eine holomorphe Funktion gegeben ist und beschreibe die entsprechend isometrische Fundamentalform auf $\mathbf{E}$.

Rückgabe: Montag 12.11.07 in der Übung.