Serie 3

1. Betrachte die Fläche $\{ xyz = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$, und berechne die Hauptkrümmungen im Punkt $(1, 1, 1)$.

2. Betrachte die Krümmung einer gegebenen Fläche $S = f(U)$ in einer Tangentialrichtung an einem Punkt p.

a) Zeige, daß für jede zwei zueinander orthogonalen Richtungen die Summe der zugeordneten Richtungskrümmungen den gleichen Wert hat.

b) Es sei $X_o \in T_pS$ eine feste Richtung und $\varkappa(\vartheta)$ die Krümmung in der Richtung X_ϑ, wobei der Winkel zwischen X_ϑ und X_o gleich ϑ ist. Zeige:

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varkappa(\vartheta) d\vartheta \,.$$

3. Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $c\colon I \to S = f(U)$ eine Asymptotenkurve mit nirgends verschwindender Krümmung.

a) *wird in der Übung behandelt*: Betrachte die Schmiegeebene von c an der Stelle $c(t)$, d.h. aufgespannt von Geschwindigkeit und Normale der Kurve c. Zeige, daß die Schmiegeebene an jedem Punkt $c(t)$ mit dem Tangentialraum $T_{c(t)}S$ der Fläche übereinstimmt.

b) Zeige, daß die Torsion τ der Kurve c und die Gauß-Krümmung von S bei allen Punkten von c die Gleichung

$$\tau^2 = -K$$

erfüllt.

4. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche in der Form

$$f(u, v) = (u, h(u) \cos v, h(u) \sin v),$$

so daß in allen Punkten $x_o \in S$ die Gaußkrümmung $K(x_o)$ positiv ist und der Abstand $h(u)$ zur Rotationsachse sein Maximum annimmt. *Zeige*: Dann ist S beschränkt.

Alternativ: Finde ein Beispiel einer unbeschränkten Rotationsfläche mit überall positiver Gaußkrümmung.

Rückgabe: In der Übung am 29.10.2007.