Serie 2

1. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Kurve

$$c(t) = \big(t(\sin t + 2\cos t), t(\sin t - 2\cos t), \sqrt{6}t\sin t\big), \quad t \in \mathbb{R}^+ .$$

a) Bestimme das Frenet-3-Bein zur Kurve c.

b) Berechne Krümmung und Torsion der Kurve c.

c) Versuche, anhand dieser Größen qualitative Eigenschaften der Kurve abzuleiten.

2. **a)** Es sei $f\colon \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ das parametrisierte Flächenstück

$$f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \log(\cos v) + u) .$$

Zeige, daß für jede $u_1 < u_2$ die Länge der Kurve $\gamma\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(u) = f(u, v)$ nicht von v abhängt.

b) Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametr. Flächenstück. Die Koordinatenkurven $u \mapsto f(u, v)$ und $v \mapsto f(u, v)$ bilden ein sogenanntes *Tschebyscheff-Netz*, falls die Längen gegenüberliegender Seiten von Vierecken aus solchen Koordinatenkurven gleich lang sind. Zeige, daß diese Bedingung äquivalent ist zu

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0 .$$

3. Betrachte dieselben Voraussetzungen wie in Aufg. 2.b).

Zeige, daß, falls die Koordinatenkurven ein Tschebyscheff-Netz bilden, es möglich ist, das Flächenstück so umzuparametrisieren, daß gilt:

$$E = 1, \quad F = \cos\vartheta, \quad G = 1 ,$$

wobei ϑ der Winkel zwischen den Koordinatenkurven ist.

4. Die Kurve $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, soll im $\mathbb{R}^3$ um die x-Achse gedreht werden. Dadurch ensteht eine (unbeschränkte) Rotationsfläche.

a) Finde ein “geeignete” Parametrisierung dieser Fläche (möglichst einfach, z.B. $x = u$).

b) Zu dieser Rotationsfläche soll später in jedem Punkt die Gauß-Krümmung ermittelt werden. Welche qualitativen Eigenschaften der Krümmung werden erwartet?

c) Bestimme die erste Fundamentalform I.

d) Bestimme die zweite Fundamentalform II.

e) Berechne daraus die Gauß-Krümmung, und besätige damit die obige Erwartung.

Rückgabe: Montag 22.10.07 in der Übung.