Serie 11

1. **a)** Zeige, daß eine Fläche S mit $K \leq 0$ kein geodätisches Polygon mit nur zwei Seiten enthalten kann, also ein Zweieck mit geodätischen Seiten.

b) Zeige, daß auf einer Fläche mit $K \leq 0$ zwei verschiedene geodätische Kurven mit gleichen Endpunkten nicht stetig ineinander überführt (bei festgehaltenen Endpunkten) werden können.

2. Zeige, daß man die euklidische Standardmetrik auf $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$ nicht auf einer beschränkten, offenen Teilmenge Ω so abändern kann, daß auf Ω die Krümmung überall positiv ist, während die Metrik auf $\mathbb{E}^2 \setminus \Omega$ fest bleibt. (Genausowenig läßt sich auch negative Krümmung auf Ω erzielen.)

3. Betrachte Polygonzerlegungen $\varphi = (\varphi_i \colon P_i \to S)_{i=1\dots,r}$ einer kompakten Fläche. Es sei $\{E_i, K_i, F_i\}$ die Menge aller Ecken, Kanten und Seiten dieser Polygonzerlegung, also $F_i = \varphi_i(P_i)$, $i = 1, \dots, r$.

Eine Polygonzerlegung φ' heißt Verfeinerung von φ, wenn:

- jede Ecke E_i von φ auch eine Ecke von φ' ist,
- jede Kante K'_j von φ' entweder ganz in einer Kante K_i oder einer Seite F_i von φ liegt, und
- jede Seite F'_j von φ' ganz in einer Seite F_i von φ liegt.

a) Zeige, daß je zwei Polygonzerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen.

b) Zeige, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Polygonalzerlegung eine Verfeinerung existiert, so daß alle Seiten einen Durchmesser kleiner als ε haben.

4. **a)** Zeige, daß die Euler-Charakteristik einer Polygonalzerlegung unter Verfeinerung invariant bleibt.

b) Folgere daraus, daß die Euler-Charakteristik einer kompakten Fläche nicht von der gewählten Polygonal-Zerlegung abhängt.

c) Zeige dieselbe Aussage direkt mit dem Satz von Gauß-Bonnet.

d) Es sei P ein geodätisches n-Eck in der hyperbolischen Halbebene Berechne die Innenwinkelsumme von P aus seinem Flächeninhalt.

Rückgabe: Montag 14.01.07 in der Übung.