Serie 1

1. **a)** Finde eine Parametrisierung der Teilmenge $C = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = y^2,\ y^4 = z^3 \,\}$ als parametrisierte Kurve.

b) Kann eine Parametrisierung von C als reguläre Kurve gefunden werden?

2. Es sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine gegebene reguläre Kurve,

a) Konstruiere folgendermaßen ein orthonormales begleitendes 3-Bein $(v_1, v_2, v_3)\colon I \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ entlang c: Es sei $v_1 = e_1$ das Einheitsgeschwindigkeitsfeld, und v_2 ein beliebiges Einheitsfeld entlang c mit $|v_2| = 1$ und $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, und setze $v_3 = v_1 \times v_2$. ***Zeige***:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \\ \dot{v}_2 &= -\omega_3 v_1 + \omega_1 v_3, \\ \dot{v}_3 &= \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2\,. \end{aligned}$$

b) Der Vektor $\omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i v_i$ heißt der Darboux-Vektor zum 3-Bein (v_1, v_2, v_3). ***Zeige***:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \omega \times v_1, \\ \dot{v}_2 &= \omega \times v_2, \\ \dot{v}_3 &= \omega \times v_3, \end{aligned}$$

und bestimme den Darboux-Vektor zum Frenet 3-Bein.

3. **a)** Es seien $\alpha\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ und $\beta\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ zwei disjunkte reguläre geschlossene Kurven ($\alpha(0) = \alpha(1)$, ...) und wähle eine 2-dimensionale Ebene in $\mathbb{R}^3$, so daß höchstens zwei Punkte von α und β auf den geichen Punkt unter senkrechter Projektion auf die Ebene fallen. (Geht das immer?). Jedem Doppelpunkt werde je nach Überkreuzung oder Unterkreuzung (finde hierfür eine genaue Definition!) die Zahl $+1$ oder -1 zugeordnet. Die Verschlingungszahl $S(\alpha, \beta)$ sei die Summe aller dieser ± 1. ***Zeige:*** $S(\alpha, \beta)$ ist wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl der Projektionsebene ab.

b) Sei nun (v_1, v_2, v_3) ein ON-3-Bein wie in 2.) entlang α. Definiere die Verdrehung von v_2 um α durch

$$D(\alpha, v_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \omega_1\, dt\,.$$

Sei nun β gegeben durch $\beta(t) = \alpha(t) + \varepsilon v_2(t)$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug, so daß α und β disjunkt sind. ***Zeige***: Falls α eine ebene Kurve ist, so gilt $S(\alpha, \beta) = D(\alpha, v_2)$.

4. Berechne das begleitende Frenetsche 3-Bein, sowie Krümmung und Torsion der Kurve

$$c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)\,.$$

Rückgabe: Montag, 15.10.07