Musterlösung zu Serie 5

1. und 2. siehe Skript zu L^p-Räumen

4.) **b)** Betrachte $X = \mathbb{R}$ und $A = \big((0,1) \cap \mathbb{Q}\big) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup \{5\}$. Dann gilt: $\mathring{A} = (2,3) \cup (3,4)$, $\overline{\mathring{A}} = [2,4]$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}} = (2,4)$, $\overline{A} = [0,1] \cup [2,4] \cup \{5\}$, $\mathring{\overline{A}} = (0,1) \cup (2,4)$, $\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,1] \cup [2,4]$. Dies sind 7 verschiedene Mengen

c) Im folgenden wird verwendet: (i) $\mathring{B}$ ist die größte offene Teilmenge von B und (ii) $\overline{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche B enthält. Es gilt

$$\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}} . \tag{1}$$

Umgekehrt gilt $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}}$ und somit wegen (i) auch $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ und daher auch

$$\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} . \tag{2}$$

Also ergeben (1) und (2) zusammen die Eigenschaft

$$\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \quad \text{f.a. } A \subset X . \tag{3}$$

Analog folgt aus $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$ die Inklusion $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ und somit

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subset \mathring{\overline{A}} . \tag{4}$$

Umgekehrt impliziert $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$ auch

$$\mathring{\overline{A}} = \mathring{\mathring{\overline{A}}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} . \tag{5}$$

Also ergeben (4) und (5) die Identität

$$\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \quad \text{f.a. } A \subset X . \tag{6}$$

(3) und (6) bedeuten, dass wir höchstens 7 verschiedenen Mengen A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ und $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ haben können.