Serie 9

1. Zeigen Sie:

a) **(L)** $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

b) **(L)** Es gibt keine zu S^1 homöomorphe Teilmenge von $\mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

c) **(L)** Ist $f\colon [a,b] \to [c,d]$ ein Homöomorphismus, so ist $f(a) = c$, $f(b) = d$, oder $f(a) = d$, $f(b) = c$. *(1 Punkt)*

2. Es sei

$$C_n = \{ x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{3^k} \mid a_k \in \{0,1,2\} \text{ f.a. } k \geq n+1 \text{ und } a_1, \dots, a_n \in \{0,2\} \} .$$

Zeige:

a) Jedes C_n ist eine endliche disjunkte Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

b) $C = \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ ist nicht leer und kompakt. *(1 Punkt)*

c) C is überabzählbar und $\overset{\circ}{C} = \emptyset$. *(2 Punkte)*

3. **(L)** Zeigen Sie: Je zwei endlich-dimensionale Vektorräume gleicher Dimension sind isomorph mit einem Isomorphismus Φ, so daß sowohl Φ als auch Φ^{-1} stetig sind. *(2 Punkte)*

4. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum heißt **lokal-konstant** genau dann, wen jedes $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ besitzt, so daß $f_{|U(x)}$ konstant ist. Zeigen Sie:

a) **(L)** Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{Z}$ ist stetig genau dann, wenn sie lokal-konstant ist. *(2 Punkte)*

b) X ist zusammenhängend genau dann, wenn jede lokal-konstante Funktion auf X automatisch konstant ist. *(4 Punkte)*

5. (*Zusatzaufgabe mit Zusatzpunkten*) **(L)** Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \int_0^y g(x,t)\, dt \, .$$

Zeige: Dann ist auch f wieder eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$. *(2 Pkte.)*
(*Hinweis: Verwenden Sie die Sätze aus der Vorlesung vom 5.6.*)

Rückgabe: Freitag, 12.06.09 in den Briefkästen