

Serie 11

1. a) (L) Berechne für $f(x, y) = \sin xy$ im Punkt $(1, 0)$ die Richtungsableitung in Richtung $v = (1/2, 1/2\sqrt{3})$ und ferner die Richtung in diesem Punkt, in der die Richtungsableitung $\partial_v f(1, 0)$ maximal ist, sowie diesen maximalen Wert. (2 Punkte)
- b) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ der Graph von $f(x, y) = xy$ und sei T die Tangentialebene im Punkt $(x_o, y_o, x_o y_o)$ von G . Bestimme die Ebenengleichung von T und zeige, daß $T \cap G$ aus zwei sich schneidenden Geraden besteht. (2 Punkte)
- c) (L) Skizziere die Niveaulinien von $f(x, y) = x^{-3}y^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R}$. (1 Punkt)
2. (L) Sei auf $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ die Funktion $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \frac{y}{x^2}(y - x^2)$ für $0 < y < x^2$ und durch $f(x, y) = y - x^2$ für $x^2 \leq y$. Berechne die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ und zeige, daß diese in \mathbb{R}_+^2 stetig sind, also daß f in \mathbb{R}_+^2 stetig differenzierbar ist. (3 Punkte)
3. Die Funktion f aus Aufgabe 2 wird wie folgt zu einer wieder mit f bezeichneten Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt: Für $y < 0$ sei $f(x, y) = -f(x, -y)$ und es sei $f(x, 0) = 0$.
- a) (L) Begründe warum, f auch auf $\{(x, y) \mid y < 0\}$ stetig differenzierbar ist. (1 Punkt)
- b) Zeige, daß f auch auf den Punkten der x -Achse differenzierbar ist, wobei das Differential $Df(x_o, 0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch (2 Punkte)
- $$Df(x_o, 0)[(u, v)] = -v \text{ für } x_o \neq 0 \quad \text{und} \quad Df(x_o, 0)[(u, v)] = v \text{ für } x_o = 0.$$
4. Es sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung $g(x, y) = (x, f(x, y))$, wobei f die Funktion aus Aufgabe 3 ist. Zeige:
- a) (L) g ist differenzierbar. (1 Punkt)
- b) (L) Das Differential von g bei $(0, 0)$ ist ein Isomorphismus. (1 Punkt)
- c) (L) Es gibt keine Umgebung von $(0, 0)$, die unter g bijektiv auf ihr Bild abgebildet wird. (1 Punkt)
- d) (L) Vergleiche dies mit dem Umkehrsatz. Welche Voraussetzung des Umkehrsatzes ist hier nicht erfüllt? (1 Punkt)

Rückgabe: Montag, 29.06.09 in den Briefkästen