Serie 10

1. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei gegebene normierte reelle Vektorräume und $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung.

a) Zeige: $\|f\|_{\mathsf{Op}} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|f(x)\|_Y$. *(1 Pkt.)*

b) Zeige: $\|\cdot\|_{\mathsf{Op}}$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$. *(1 Pkt.)*

c) Berechne die Operatornorm der linearen Abbildung

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^2$. *(2 Pkte.)*

2. a) **(L)** Betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y) = \left(\int_0^y e^{-xt^2}\, dt,\ \ln(1 + x^2y^2),\ \arctan \frac{y}{x} \right).$$

Zeige: f ist überall differenzierbar und berechne die Jakobi-Matrix in dem Punkt $(1, 0)$. *(2 Pkte.)*
(*Hinweis*: Vergessen Sie nicht, ein hinreichendes Kriterium für die Differenzierbarkeit an einem beliebigen Punkt in $\mathbb{R}^2$ anzugeben und zu verifizieren.)

b) **(L)** Bestimme alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, bei denen das Differential $Df\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ der Abbildung $f(x, y, z) = (e^x, \frac{(1+x)z}{1+y^2})$ nicht surjektiv ist. *(2 Pkte)*

3. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und durch $f(0, 0) = 0$. Zeige:

a) **(L)** f ist stetig. *(1 Pkt.)*

b) **(L)** $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$. *(1 Pkt.)*

c) **(L)** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren und sind in $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. *(1 Pkt.)*

d) **(L)** Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. *(1 Pkt.)*

(Dies ist ein Beispiel, in dem die Vertauschungsregel nicht gilt.)

Bitten wenden!

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und durch $f(0,0) = 0$. Zeige:

a) **(L)** f ist stetig, $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren, sind bei $(x,y) \neq (0,0)$ stetig und bei $(0,0)$ nicht stetig. *(1 Pkt.)*

b) **(L)** Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ und die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \partial_v f(0,0)$ ist linear. *(1 Pkt.)*

c) **(L)** Die Funktion f ist bei $(0,0)$ nicht differenzierbar. *(1 Pkt.)*

Rückgabe: Montag, 22.06.09 in den Briefkästen