

# Übungsaufgaben

---

In der Klausur dürfen **keine** Hilfsmittel (Taschenrechner, Skript, Buch, Notizen, etc.) verwendet werden.

Endergebnisse, Lösungswege und getroffene Aussagen sollten formuliert werden.

---

1. (L) Berechne  $\arctan'(x)$  und bestimme die Taylorreihe bei 0.

2. (L) Bestimme die Stammfunktion von  $\frac{x}{x^3-x^2+x-1}$ .

3. (L) Für welche  $s, t \in \mathbb{R}$  existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+x^{-1})^t dx}{(1+x)^s} \quad ?$$

4. a) (L) Ist  $X = \left\{ \left( \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$  eine kompakte Menge? Begründe.

b) Nimmt die Funktion  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  auf  $X$  ihr Supremum an?

5. (L) Sind  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  und  $\mathbb{R}^2$  homöomorph? Begründe.

6. Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Eigenschaft, daß alle Richtungsableitungen von  $f$  in  $0 \in \mathbb{R}^3$  existieren und der Differenzierbarkeit von  $f$  in  $0$ ? Gib die Definitionen der beiden Eigenschaften.

7. (L) Bestimme die Jakobi-Matrix von  $f(x, y, z) = (xe^{-y^3z}, x - \sin \frac{y}{z})$  für  $z \neq 0$ .

8. Sei  $f: M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung  $f(A) = \text{spur}(A \cdot A^t)$ . Zeige, daß  $f$  überall differenzierbar ist, und berechne das Differential von  $f$  in  $A$ .

9. (L) Untersuchen Sie, ob die Abbildung  $f(x, y) = ((x-1)^2 - y^2, 2(x-1)y)$  in einer Umgebung eines gegebenen Punktes  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

**Bitten wenden!**

10. Zeigen Sie: Eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen bildet kompakte Mengen wieder auf kompakte Mengen ab.
11. (L) Gib die Definition eines zusammenhängenden metrischen Raumes.
12. (L) Gib die Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes.
13. Sind je zwei Normen auf einem Vektorraum äquivalent? Begründe.