Beschränkt

Def.: Sei $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(a_n) heißt beschränkt $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{a_n\}$ ist beschränkt

$\Leftrightarrow$ ex. $M > 0$ s.d. $|a_n| \leq M$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

(a_n) heißt Nullfolge $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim a_n = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n| < \varepsilon$ f.a. $n \geq n_0$

II.2.7 **Satz:** Sei $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:

(a) $\lim a_n = a \Rightarrow (a_n)$ beschränkt

(b) $\lim a_n = a \Leftrightarrow (a_n - a)$ Nullfolge

(c) Sei (a_n) N.F. und (b_n) beschränkt,

$\Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ N.F.

Bew.: (a) Wdh. von II.2.3
(b) einfach

(c) Sei $|b_n| \leq M$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

und $\varepsilon > 0$. Finde $n_0 = n_0(\varepsilon, M)$ s.d.

$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ f.a. $n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$ " $\square$

Bew. v. II.2.6

(a) Übung, (b) Übung

(c) Sei $a_n \to a$, $b_n \to b$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n - a)\cdot b_n + a \cdot (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|$$

(b_n) konv $\Rightarrow$ (b_n) beschränkt

$\overset{II.2.7}{\Longrightarrow}$ $((a_n - a)\cdot b_n)$ ist N.F.

analog $(a \cdot (b_n - b))$ N.F.

(a) $\Rightarrow$ $((a_n - a) \cdot b_n) + (a \cdot (b_n - b))$ NF.

(d) Sei $a_n \to a$, $a \neq 0$

$\Rightarrow$ ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|a_n - a| < \frac{a}{2}$ f.a. $n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $|a_n| \neq 0$ f.a. $n \geq n_0$ und $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ "

Betrachte $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n \cdot a}\right| \leq \frac{2}{|a|^2} \cdot |a_n - a|$

Sei $\varepsilon > 0$ und finde $n_1 \in \mathbb{N}$ s.d.

$|a_n - a| < \frac{|a|^2}{2} \varepsilon$ f.a. $n \geq n_1$

Also $\forall\, n \geq \max(n_0, n_1)$: $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$

(e) $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $z_n = x_n + i y_n$

Dann $z_n \to x + iy$

$\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ und $y_n \to y$

Bew: $|z_n - (x+iy)|$

$= \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq \sqrt{2}\, \max(|x_n - x|, |y_n - y|)$

und ebenso $|z_n - (x+iy)| \geq \max(|x_n - x|, |y_n - y|)$

Also: $(z_n - (x+iy))$ N.F.

$\Leftrightarrow$ $(x_n - x)$ und $(y_n - y)$ N.F.

Aufgabe: das gleiche für $\mathbb{R}^n$

Wdh. Heron-Verfahren

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \to \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$x \neq 0$

$\Downarrow$

$x_{n+1} \to x$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),\; x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{a}.$$

II.28 (Prinzip der Intervallschachtelung) Satz

Def.: Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$\left([a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots\right)$$

heißt Intervallschachtelung $:\Leftrightarrow$

(a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Es gilt: Zu jeder Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine 1-dtige Zahl $w \in \mathbb{R}$ s.d.

$w \in [a_n, b_n]$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, also

$$\{w\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Bew.:

$([a_n, b_n])$ Int.schacht.

$\Rightarrow$ (a_n) monoton steigend,
(b_n) monoton fallend

und $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$

und $b_n - a_n \to 0$.

$\Rightarrow$ (a_n) oberhalb besch. und (b_n) unterhalb besch.

II.24 $\Rightarrow$ $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ex. und

$a_n \leq a, \; b \leq b_n \quad \forall n$

Beh.: $a = b$

Bew.: Angen. $a \neq b$, also $|a-b| > 0$

Wähle $0 < \varepsilon < |a-b|$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$ f.a. $n \geq n_0$
und $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$ $|a-b| = |a - a_n + a_n - b_n + b_n - b|$
$\leq |\;"\;| + |\;"\;| + |\;"\;|$ f.a. $n \geq n_0$
$< \varepsilon$ $\lightning$.

Also: $a = b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. $\Rightarrow$ Existenz von w.

Eindeutigkeit von w.

Sei $w, w' \in \bigcap [a_n, b_n]$ und $w < w'$

$\Rightarrow b_n - a_n \geq w' - w \ \forall n$ ↯.

$\square$

II.2.9 **Satz** (Auswahlsatz von Bolzano, 1781–1848)

Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:

(a_n) beschränkt $\Rightarrow$ ex. kvg. Teilfolge (a_{n_k})

Beweis: Definiere Hilfsbegriff: $n_0 \in \mathbb{N}$ heiße Gipfelstelle von (a_n)

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} a_k < a_{n_0}$ f.a. $k > n_0$

Fallunterscheidung: Fall 1. (a_n) besitzt unendlich viele Gipfelstellen

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

$\Rightarrow (a_{n_k})$ ist streng monoton fallende Teilfolge

II.2.4 $\Rightarrow (a_{n_k})$ kvg.

Fall 2: (a_n) besitzt nur endlich viele Gipfelstellen,

und a_{n_k} sei die letzte.

$\Rightarrow$ ex. $l_1 > n_k + 1$ s.d. $a_{l_1} \geq a_{n_k+1}$,

ansonsten wäre n_k+1 G.S. $\lightning$

$\Rightarrow$ ex $l_2 > l_1$ s.d. $a_{l_2} \geq a_{l_1}$,

ansonst wäre l_1 G.S $\lightning$

$\Rightarrow$ ... erhalten rekursiv eine Teilfolge

$l_1 < l_2 < \ldots$, $(a_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$

mit (a_{l_k}) monoton steigend $\Rightarrow$ konv. $\boxtimes$

II.2.10 **Satz** (a) Seien $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konv.

mit $a_n \leq b_n$ für fast alle n

Dann gilt $\lim a_n \leq \lim b_n$.

(b) $(a_n), (b_n), (c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: $a_n \to x$, $c_n \to x \Rightarrow b_n \to x$.

(„Sandwich-Methode")

Bew.: (a) Angenommen $\overset{a}{\overset{\shortparallel}{\lim a_n}} > \overset{b}{\overset{\shortparallel}{\lim b_n}}$

Sei $\varepsilon > 0$ mit $\lim a_n - \varepsilon > \lim b_n + \varepsilon$

$a_n \to a \Rightarrow$ fast alle a_n liegen in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
$b_n \to b \Rightarrow$ " " b_n " " $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

aber $\left.\begin{array}{l} x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ y \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow x > y$, da $a-\varepsilon > b+\varepsilon$

Wid. zu $a_n \leq b_n$ für fast alle n.

(b) Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ fast alle a_n, c_n liegen in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

$\Rightarrow [a_n, c_n] \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ f.f.a. n.

Also: $b_n \to x$.

$\boxtimes$

BRUNNEN