Musterlösung zu Serie 5

4.) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$ eine gegebene Folge.

a) Angenommen $\lim a_n = a \in X$, also

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \;\; d(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{f.a. } n \geq n_o\,.$$

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < \ldots$, also (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n).
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann finden wir ein $k_o \in \mathbb{N}$ mit $n_{k_o} \geq n_o(\varepsilon)$, und es gilt $d(a_{n_k}, a) < \varepsilon$ für alle $k \geq k_o$, also $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

b) Angenommen es existiert ein $a \in X$ so daß für alle Teilfolgen (a_{n_k}) von (a_n) gilt: $\lim a_{n_k} = a$.
Beh.: Dann konvergiert auch (a_n) gegen a.
Bew.: Angenommen, das ist falsch. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ so daß für alle $n_o \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_o$ existiert mit $d(a_n, a) \geq \varepsilon$.
Daraus konstruieren wir rekursiv eine Teilfolge: Sei zuerst $n_o = 1$ und wir finden $n_1 \geq 1$. Sei darauf $n_o = n_1 + 1$ und wir finden $n_2 > n_1$, usw.. Also falls n_k gegeben ist, finden wir $n_{k+1} \geq n_k + 1$, so daß $d(a_{n_{k+1}}, a) \geq \varepsilon$. Insgesamt haben wir also eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $d(a_{n_k}, a) \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und diese kann nicht gegen a konvergieren. Widerspruch zur Annahme! Somit muss $\lim a_n = a$ gelten.