Analysis A – Musterlösungen zur Klausur

Aufgabe 1

Es sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$ gesucht, die die Bedingung $x + \frac{1}{x} \leq 2$ erfüllen (diese ganzen x zusammen bilden die Menge M). Für $x = 0$ ist der Term nicht definiert. Für $x < 0$ ist immer $x + \frac{1}{x} < 0$ und damit auch ≤ 2. Damit ist die M nicht nach unten beschränkt und es können Minimum und Infimum nicht als reelle Zahlen existieren, d.h. $\inf M = -\infty$. Für $x > 0$ ist

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \leq 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Da Quadratzahlen nie negativ sind, gilt dies nur für $x = 1$. Es ist also $M = (-\infty, 0) \cup \{1\}$ und damit $\sup M = \max M = 1$.

Aufgabe 2

Für $n = 1$ ist $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 = n^3$, also ist der Induktionsanfang erfüllt. Gelte nun $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = n^3$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 - 3k + 1) &= \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 \\
&= n^3 + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 \\
&= n^3 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 1 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3
\end{aligned}
$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt damit die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3

- $\frac{(5n-3)(2n+2)(n-1)}{(4n+2)^2(n+1)} = \frac{10n^3-6n^2-10n+3}{16n^3+32n^2+20n+4} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{10-6\frac{1}{n}-10\frac{1}{n^2}+3\frac{1}{n^3}}{16+32\frac{1}{n}+20\frac{1}{n^2}+4\frac{1}{n^3}} \to \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$, Folge konvergiert also gegen $\frac{5}{8}$.
- $\sqrt{n^4 + 2n^3} - n^2 = \frac{(\sqrt{n^4+2n^3}-n^2)(\sqrt{n^4+2n^3}+n^2)}{\sqrt{n^4+2n^3}+n^2} = \frac{2n^3}{\sqrt{n^4+2n^3}+n^2} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2n}{\sqrt{1+2\frac{1}{n}}+1} \to \infty$, also divergiert die Folge.
- $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 0$, also konvergiert die Folge gegen 0.

Aufgabe 4

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m > N$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a, also existiere für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Ist ebenfalls $m > N$, so gilt $|a_n - a_m| = a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, jedoch aber in vollständigen Räumen (wie z. B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Aufgabe 5

Mit dem Quotientenkriterium ist $\left|\frac{5(n+1)+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{5n+1}\right| = \frac{5n+6}{2(5n+1)} = \frac{n}{n} \cdot \frac{5+6\frac{1}{n}}{10+2\frac{1}{n}} \to \frac{5}{10} < 1$, also $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, weshalb die Reihe konvergiert.

Aufgabe 6

Für den Konvergenzradius gilt $R = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{k^3} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 = 1$, weshalb die Reihe für $|z| > 1$ divergiert und für $|z| < 1$ konvergiert. Für $|z| = 1$ ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^3} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k^3}$. Diese Reihe konvergiert, also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^3}$ für $|z| = 1$ absolut konvergent. Die Reihe ist also insgesamt konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$.

Aufgabe 7

Betrachte die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ Es ist $x_n \to 0$ und $f(x_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Mit der Folge $y_n = \frac{\mathrm{i}}{n}$ gilt ebenfalls $y_n \to 0$, aber $f(y_n) = \frac{-\frac{\mathrm{i}}{n}}{\frac{\mathrm{i}}{n}} = -1$. Wegen $1 \neq -1$ stimmen die Grenzwerte nicht überein, und f ist bei $z = 0$ nicht stetig fortsetzbar.

Aufgabe 8

(a) Zunächst muss die stetige Fortsetzung gefunden werden. Ist $x_n \to 0$, so folgt aus der Beschränktheit der Sinusfunktion sofort $f_c(x_n) = 1 + x_n^2 \sin(\frac{1}{x_n}) \to 1 + 0 = 1$, also ist f_c für $c = 1$ stetig.

Es gilt nun $\frac{f_1(0+h)-f_1(0)}{h} = \frac{1+h^2\sin(\frac{1}{h})-1}{h} = h\sin(\frac{1}{h}) \to 0$ für $h \to 0$, da $\left|\sin\frac{1}{h}\right| \leq 1$. Also ist f_1 differenzierbar in $x = 0$.

(b) Für $x \neq 0$ ist $f_c'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2\cos(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2} = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.

Aufgabe 9

Angenommen, $\mathbb{N}$ sei beschränkt. Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, existiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke $S := sup\mathbb{N}$. Es ist dann $S - \frac{1}{2}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > S - \frac{1}{2}$. Damit ist $n + 1 > S + \frac{1}{2} > \sup \mathbb{N}$. Weil aber $n+1 \in \mathbb{N}$ aufgrund der Definition von $\mathbb{N}$, ist dann S doch kein Supremum von $\mathbb{N}$. Damit muss $\mathbb{N}$ unbeschränkt sein.

Aufgabe 10

Sei die Reihe $\sum |a_k - a_{k+1}|$ konvergent. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < \varepsilon$. Für $n, m > N$, o. B. d. A. $m > n$, ist dann

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} \pm \ldots + a_{m-1} - a_m| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m} |a_k - a_{k+1}| \\
&\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und da wir uns in $\mathbb{C}$ befinden, ist damit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergent.

Aufgabe 11

Nach Aufgabe 8 ist $f_1'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Der erste Summand konvergiert offensichtlich wieder gegen 0. Für den zweiten betrachte die Folge $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ mit $\cos(\frac{1}{x_n}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ für $x \to 0$, was nicht konvergiert. Damit kann f_1' in $x = 0$ nicht stetig fortgesetzt werden.

Aufgabe 12

Für $\delta \to 0$ gilt $f(\delta) \to 0$ wegen der Stetigkeit in 0. Nun gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
&f(x+\delta) - f(x) \leq f(x) + f(\delta) - f(x) = f(\delta) \\
&f(x) - f(x+\delta) = f(x+\delta-\delta) - f(x+\delta) \leq f(x+\delta) + f(-\delta) - f(x+\delta) = f(-\delta)
\end{aligned}$$

$$|f(x+\delta) - f(x)| = \max\{f(x+\delta) - f(x), f(x) - f(x+\delta)\} \leq \max\{f(\delta), f(-\delta)\} \to 0$$

Damit gilt also $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, also ist f stetig in allen $x \in \mathbb{R}$.