Serie 9

1. **a)** *Zeige (2 Punkte)*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent und es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}\right) .$$

b) *Zeige (2 Punkte)*: Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x .$$

2. *3 Punkte* Zeige durch Induktion nach k: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $|x| < 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^k} .$$

3. *1 Punkt pro Teilaufgabe:* Berechne die Grenzwerte

a) $a = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \mp \ldots$,

b) $b = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$,

c) $c = 2,01010101\ldots$ in der 3-adischen Darstellung.

d) $d = 0,123123123123\ldots$ in der 4-adischen Darstellung.

4. Betrachte die folgende sogenannte Doppelfolge für $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$a_{m,n} := \begin{cases} \frac{1}{m^2 - n^2}, & \text{falls } m \neq n, \\ 0, & \text{falls } m = n . \end{cases}$$

a) *Zeige (1 Punkt)*: Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ ist $r_m := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n}$ konvergent und für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist $s_n := \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n}$ konvergent.

b) *(2 Punkte)*: *Zeige* $s_n = \frac{3}{4n^2}$ und *berechne* r_m.

c) *Zeige (1 Punkt)*: Die Reihen $\sum_{m \in N} r_m$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n$ sind konvergent, d.h.

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n}\right)$$

existieren, und sie sind verschieden.

Rückgabe: spätestens Dienstag, 16.12.08, 10.30 Uhr in den Briefkästen