Übungs-Klausur

Name:

Matr.-Nr.:

Es dürfen **keine** Hilfsmittel (Taschenrechner, Skript, Buch, Notizen, etc.) verwendet werden.

Endergebnisse, Lösungswege und getroffene Aussagen sollten formuliert werden.

1. **a)** Formuliere das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen (oder eine dazu äquivalente Aussage).

b) *Zeige*: Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element.

c) Bestimme $\sup_{n\in\mathbb{N}}(3+\frac{(-1)^n}{n})$ und $\limsup_{n\in\mathbb{N}}(3+\frac{(-1)^n}{n})$.

2. *Zeige*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: 7 teilt $10^n - 3^n$.

3. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -16$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene. *(2 Punkte)*

4. **a)** Bestimme für folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt und berechne im Konvergenzfall den Grenzwert:

- $a_n = \frac{10^n}{n^{10}}$
- $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

b) *Zeige*: Eine monotone und beschränkte reelle Folge ist konvergent.

5. **a)** Bestimme Konvergenz oder Divergenz folgender Reihen:

- $\sum \frac{1}{n!}$
- $\sum (\frac{1}{3+(-1)^n})^n$

b) Beweise folgende einfache Version des Quotientenkriteriums: Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $\sum a_n$ konvergiert.

6. Geben Sie die Definition der Stetigkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, in einem Punkt $z_o \in D$.

Bitten wenden!

7. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Zeige*: $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3 Punkte)

8. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\sum \frac{x^{2n+1}}{4^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{(2n)!}$.

(4 Punkte)

9. Sei (a_n) die Folge $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Wie ändert sich der Wert für $(a_n) = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$?*(3 Punkte)*

10. Bestimmen Sie die stetige Fortsetzung von $\frac{\sin z}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach 0.*(3 Punkte)*