Analysis 4 für Physiker, Serie 8

Abgabe am 6. Juni 2007

1. (a) Für welche $\alpha > 0$ ist $\frac{1}{|x|^\alpha} \in \mathrm{L}^1((-1,1))$?

   (b) Man beweise oder widerlege: 1) $\ln|x| \in \mathrm{L}^1((-1,1))$, 2) $\ln|x| \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

   (c) Für $x, y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \neq (0,0)$, sei $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Zeigen Sie, dass f über der Einheitskreisscheibe $K_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ integrierbar ist und berechnen Sie $\iint_{K_1(0)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Für welche $\alpha > 0$ ist $\left|f\right|^\alpha \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$?

   (d) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Für $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ setzen wir $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$. Für welche $\alpha > 0$ ist f über der Einheitskugel $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ integrierbar?

   6 P

2. Beweisen Sie, dass für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $m, k \in \mathbb{Z}_+$ gilt:

$$x^m \delta^{(k)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < m, \\ \alpha_{mk}\, \delta^{(k-m)}, & k \geq m, \end{cases}$$

   mit geeigneten reellen Konstanten α_{mk}. Bestimmen Sie α_{mk}. **4 P**

3. Gegeben sei die Funktion $q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, $q(x) = x^2$. Zeigen Sie, dass die Distribution $T = c_1 T_1 + c_2 T_H + c_3 \delta - \mathscr{P}\,\frac{1}{x}$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ die Gleichung $qT' = T_1$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ erfüllt.
   Hinweis. Dabei T_f die zu $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ assoziierte reguläre Distribution und H ist die Heavisidefunktion. *Bemerkung.* In $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ hat also die gDGl $x^2 u'(x) = 1$ eine dreiparametrige Lösungsmenge T, wogegen die klassische Lösung $u(x) = c_1 - \frac{1}{x}$ nur einen Parameter hat.

   4 P

4. Es sei $\sum_{k=0}^\infty c_k \delta_{x_k}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $x_k \in \mathbb{R}$.

   Beweisen Sie, dass die obige Reihe in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ gegen eine Distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ konvergiert, falls zumindest eine der beiden unten stehenden Bedingungen (a) oder (b) erfüllt ist.

   (a) $\lim_{k\to\infty} |x_k| = +\infty$.

   (b) $\sum_{n=0}^\infty |c_n| < \infty$. **6 P**