Analysis 4 für Physiker, Serie 5

Abgabe am 9. Mai 2007

1. Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und
$$u(x,y) = xy + x\,g\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0.$$
Zeigen Sie, dass $x\,u_x + y\,u_y = xy + u$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$. **2 P**

2. Es sei $v = v(x,y)$, $v \in C(\mathbb{R}^2)$ eine gegebene Funktion und $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$ für alle $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Wir definieren über $u(r,\varphi) = v(x,y) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ eine neue Funktion u.
Bestimmen Sie
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$
in Abhängigkeit von x, y, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy} und v_{yy}. **5 P**

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die charakteristischen Linien in der xy-Ebene.
$$u_x + u_y = u^2, \quad u(x,0) = 1.$$
4 P

4. Betrachtet wird die PDGl $x\,u_x + y\,u_y = 2u$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Bestimmen Sie die charakteristischen Linien (in der xy-Ebene).
   (b) Geben Sie zum Anfangswertproblem $u(x,0) = x^2$ zwei Lösungen an. **4 P**

5. Ermitteln Sie für alle Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ den Typ der folgenden PDGl. Im Falle des gemischten Typs skizzieren Sie die Bereiche der Ebene, wo die Gleichung elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist.
   (a) $$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$$
   (b) $$u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + 4u - x^2 y = 0.$$
   (c) $$(1+x)u_{xx} + 2xy\,u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0.$$
   (d) $$3u_y + u_{xy} = 0.$$
4 P