Analysis 4 für Physiker, Serie 13

Abgabe am 11. 7. 2007

1. Lösen Sie das klassische Anfangswertproblem für die inhomogene eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} + \mathrm{e}^{-t} \cos x, \quad u(x,0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

4 P

2. Lösen Sie das klassische Anfangswertproblem der eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - 9u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \mathrm{e}^{-3x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

4 P

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $w(r,\varphi) = \frac{1}{2}(1 - r^2 \cos(2\varphi))$ die zweidimensionale Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten erfüllt. Schreiben Sie die Lösung in kartesischen Koordinaten auf und bestimmen Sie w für $r = 1$ in kartesischen Koordinaten. **2 P**

4. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt es Funktionen $u \in \mathrm{C}^2([0,a])$ mit $u(0) = u(a) = 0$, $u \not\equiv 0$, und

$$u'' = \lambda u.$$

Für alle derartigen λ bestimme man alle zugehörigen u. **4 P**

5. Es sei $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+)$ und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x) = f(r)$, wobei $r = \|x\|$. Bestimmen Sie Δu in Abhängigkeit von n, f, r. **4 P**