Analysis 4 für Physiker, Serie 12

Abgabe am 4. 7. 2007

1. Es sei $\mathscr{E}_1 = T_{E_1}$ die Fundamentallösung der eindimensionalen Wellengleichung und $u_1 \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ habe kompakten Träger. Berechnen Sie die Faltung $\mathscr{E}_1 * (T_{u_1} \otimes \delta)$. **4 P**

2. Es sei $u_1 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ und $u(x,t) = \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\,\mathrm{d}y$.
   Zeigen Sie, dass u die eindimensionale Wellengleichung erfüllt sowie die Anfangsbedingungen $u_t(x,0) = u_1(x)$ und $u(x,0) = 0$. **3 P**

3. Es sei $F \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ und
$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \iint_{\triangle} F(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(y,s)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s$$
   (a) Skizzieren Sie den Bereich $\triangle$, der durch die iterierten Integrale auf der rechten Seite gegeben ist.
   (b) Zeigen Sie, dass v die inhomogene eindimensionale Wellengleichung $v_{tt} - a^2 v_{xx} = F$ mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ erfüllt.

   Hinweis. Benutzen Sie die Formel für die Differentiation von Parameterintegralen,
   $\dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_{a(t)}^{b(t)} G(y,t)\,\mathrm{d}y = G(b(t),t)b'(t) - G(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(y,t)\,\mathrm{d}y.$ **5 P**

4. Berechnen Sie die Fouriertransformationen der folgenden Distributionen aus $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$
   (a) $S = x\delta''$ (b) $T = (x+a)^2\delta - 5x\delta'$, $a \in \mathbb{R}$ (c) $R = T_{x^2 H(x)}$.

   Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden regulären Distribution aus $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$. (d) $U = T_{x_1 x_2 \mathrm{e}^{-x_1^2}}$. **4 P**

5. Lösen Sie das folgende AWP für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$.
$$u_{tt} - 8\Delta u = t^2 x^2,$$
$$u(x,y,z,0) = y^2,$$
$$u_t(x,y,z,0) = z^2.$$
   Hinweis. Teilen Sie das Problem in drei eindimensionale Probleme auf. **4 P**