Analysis 4 für Physiker, Serie 11

Abgabe am 27. Juni 2007

1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{T_f}$ bzw. $\widehat{T}$ zu:

   (a) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $T = \mathscr{P}\,\frac{1}{x}$.

   (c) $f(x) = H(x)$.

   (d) $f(x) = \frac{1}{2a} H(at - |x|)$, $a > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ sind beides Parameter.

   (e) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Hinweis. Für (c) verwenden Sie bitte die Übungsaufgabe 10.4 (a) und betrachten Sie den Grenzwert für $a \to 0+0$. **8 P**

2. Wir betrachten die linearen Operatoren $A, A^+ \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, die durch $(A\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(x\varphi(x) - \varphi'(x)\big)$ $(A^+\varphi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(x\varphi(x) + \varphi'(x)\big)$ definiert sind.

   (a) Berechnen Sie $A^+A - AA^+$.

   Wir definieren rekursiv eine Folge von Funktionen $(H_n(x))$ durch

   $$H_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} A(H_n), \quad H_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Berechnen Sie $H_1(x)$ und $H_2(x)$.

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $\mathscr{F} H_n = (-\mathrm{i})^n H_n$.

   (d) Es sei $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ der komplexe Hilbertraum mit dem Standardskalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}x$, $f, g \in H$. Zeigen Sie, dass $\langle H_n, H_m\rangle = 0$ falls 4 kein Teiler von $n - m$, $n, m \in \mathbb{N}$, ist.

   Bemerkung. $H_n(x)$ heißen *Hermitefunktionen.* (H_n) ist ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Insbesondere ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ eine dichte Teilmenge des Hilbertraumes H. **8 P**

3. Zeigen Sie, dass für alle $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

   $$\mathscr{F}(D^\alpha T) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\,\xi^\alpha \mathscr{F} T.$$

   4 P

4. Die Funktion $E \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei gegeben durch

   $$E(x,t) = \frac{H(t)}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{\|x\|^2}{4a^2 t}}.$$

   Zeigen Sie, dass $E \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$.

   Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass für alle $t_0 \in \mathbb{R}$, $E(\cdot, t_0) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. **4 P**