Analysis 4 für Physiker, Serie 10

Abgabe am 20. Juni 2007

1. (a) Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $\frac{\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)}{\varepsilon} - \varphi'(x) \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$ für $\varepsilon \to 0$.

   (b) Für $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die „Verschiebung" von $T(x+a)$ über $T(x+a)\big(\varphi(x)\big) = T\big(\varphi(x-a)\big)$. Insbesondere ist $T(x) = T$. Dabei ist x nur als Symbol zu lesen. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{T(x+\varepsilon)-T(x)}{\varepsilon} = T'(x) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

4 P

2. Es seien $F, G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} F \subseteq [a, +\infty)$ und $\operatorname{supp} G \subseteq [b, +\infty)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $F * G$ existiert.

   (b) Berechnen Sie $(F*G)' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ für $F = T_{\chi_{[a,+\infty)}}$ und $G = T_{\chi_{[b,+\infty)}}$.

   Hinweis: Die Faltung existiert genau dann, wenn die Menge K_φ aus Definition 13 beschränkt ist.

4 P

3. a) Für $F \in \mathscr{D}(\mathbb{R})'$ sei $G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ die Distribution $G = T_1 \otimes F$.
   Zeigen Sie:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G = 0.$$

   b) Es seien $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ und $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$.
   Zeigen Sie: $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} T_u - \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_u = 0$.

6 P

4. Berechnen Sie die Fouriertransformationen $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}x$ von

   (a) $f(x) = H(x)\mathrm{e}^{-ax}$, $a > 0$.

   (b) $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

6 P

5. Es sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie eine Ihrer Antworten ausführlich.

   (a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\varphi^{(k)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

   (b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x^k \varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

   (c) $\mathrm{e}^x \varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

   (d) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\dfrac{\varphi(x)}{x^k} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

   (e) Für alle $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist $\varphi \cdot \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

3 P