

Gruppe A
Test — Analysis 4 für Physiker
06.06.2007

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Lösen der 4 Aufgaben. Benutzen Sie bitte für jede Aufgabe ein **extra Blatt**. Schreiben Sie auf jedes Blatt leserlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Schreiben Sie in Sätzen und begründen Sie Ihre Antworten. Taschenrechner und Aufzeichnungen sind nicht erlaubt. Bitte schalten Sie Ihr Handy aus. Notieren Sie zum Schluss auf Ihrem ersten Blatt, wie viele Blätter Sie abgeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

Es sei $H = \ell_2$ der komplexe Hilbertsche Folgenraum. Für $x = (x_n) \in H$ definieren wir den linearen Operator

$$T(x) = \left(\frac{x_n}{n} \right) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in H$ gilt: $T(x) \in H$. **1 P**
- (b) Berechnen Sie $\|T\|$. **1 P**
- (c) Bestimmen Sie das Punktspektrum von T . **2 P**
- (d) Berechnen Sie die Resolvente $R_\lambda(T)$ von T an der Stelle $\lambda = 2$ und deren Norm. **3 P**

Aufgabe 2: Lösen Sie das Anfangswertproblem in \mathbb{R}^2 :

$$u_x + u_y = u^2, \quad u(x, -x) = 1.$$

4 P

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Typ der partiellen DGL und bestimmen Sie eine geeignete Koordinatentransformation, $\xi = \xi(x, y)$ und $\eta = \eta(x, y)$, sodass die Gleichung auf charakteristische Form transformiert wird:

$$u_{xx} - 2e^{-x}u_{xy} + (e^{-2x} - 1)u_{yy} + 3u_y - x = 0.$$

4 P

Hinweis. Das Ausführen der Transformation wird nicht verlangt.

Aufgabe 4: Für $a > 0$ sei $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben über $f_a(x) = H(x)e^{-ax}$, wobei H die Heavisidefunktion $H = \chi_{(0,+\infty)}$ ist.

Zeigen Sie, dass $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ und berechnen Sie für $a, b > 0$, $a \neq b$, die Faltung $f_a * f_b$. **3 P**

Klage nicht, handle!
Hölderlin