

Kapitel 4

Determinanten

4.1 Definition und einfache Eigenschaften

Determinanten bilden ein äußerst wichtiges Hilfsmittel in der linearen Algebra. Mit ihrer Hilfe kann man unmittelbar die Konsistenz von linearen $n \times n$ -Gleichungssystemen erkennen, Volumina von Parallelepipeden ausrechnen, Geraden- oder Kreisgleichungen formulieren u.v.a.

Es gibt im wesentlichen zwei Möglichkeiten, um Determinanten einzuführen, zum einen die Leibnizsche Definition, die einige zusätzliche Erläuterungen bedarf und zum zweiten eine axiomatische Charakterisierung, durch ihre wichtigsten Eigenschaften. Die letzte ist eleganter und beinhaltet gleichzeitig eine einfache Berechnungsmethode.

Wir benutzen zunächst die axiomatische Charakterisierung der Determinante. Für eine gegebene Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ seien $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, $i = 1, \dots, n$, die Zeilenvektoren der Matrix. Hier seien e_j die Zeileneinheitsvektoren im $\mathbb{K}^n$. Dann kann man die Matrix auch schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Definition 4.1 Eine Abbildung $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \det A$, heißt *Determinante*, falls folgendes gilt:

(D1) $\det$ ist linear in jeder Zeile $i = 1, \dots, n$, das heißt, wenn $a_i = \lambda b_i + \mu c_i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $b_i, c_i \in \mathbb{K}^n$, dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda b_i + \mu c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dabei seien bei den drei beteiligten Matrizen alle Matrixeinträge außerhalb der i ten Zeile jeweils gleich.

(D2) $\det$ ist *alternierend*, das heißt, vertauscht man zwei Zeilen a_i und a_j , so ändert sich das Vorzeichen:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(D3) $\det$ ist *normiert*, das heißt, $\det I_n = 1$.

Eine andere Schreibweise für $\det A$ ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese Definition der Determinante ist recht einfach. Es bleibt aber zu zeigen, dass solche Abbildung überhaupt *existiert*. Zunächst wollen wir einige Eigenschaften, u. a. die Eindeutigkeit, aus der Definition ableiten. Dazu setzen wir die Existenz voraus.

Satz 4.1 (Eigenschaften der Determinante) *Es sei $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Determinantenabbildung, dann gilt für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(D4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$

(D5) *Besitzt A zwei identische Zeilen oder eine Nullzeile, so gilt $\det A = 0$.*

(D6) *Entsteht die Matrix A' aus A durch die dritte elementare Zeilenoperation, das heißt, man erhält A' aus A indem man das λ fache der i ten Zeile von A zur j ten Zeile von A addiert (wobei $i \neq j$), so gilt*

$$\det A' = \det A.$$

(D7) *Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

so ist $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

(D8) Es sei $n \geq 2$ und $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen A_1 und A_2 . Dann gilt

$$\det A = \det A_1 \det A_2.$$

(D9) $\operatorname{rg} A < n$ ist äquivalent zu $\det A = 0$.

(D10) $\det$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. (D4) folgt unmittelbar aus (D1) indem man λ aus jeder Zeile als Faktor herauszieht. (D5) Vertauscht man identische Zeilen, so ändert sich die Matrix nicht, wohl aber das Vorzeichen der Determinante wegen (D3); also gilt $\det A = -\det A$ und somit $\det A = 0$. Aus einer Nullzeile kann man durch Herausziehen des Faktors $\lambda = 0$ erhalten, dass $\det A = 0 \det A = 0$.

(D6) Sei $i < j$. Nach (D1) gilt

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A.$$

Wir halten fest, dass durch die elementare Zeilenoperation (a) (Vertauschen zweier Zeilen) ein Faktor -1 hinzukommt, durch Multiplikation einer Zeile mit λ der Faktor λ hinzukommt und durch Zeilenoperation (c) sich die Determinante nicht ändert.

(D7) Ist ein Diagonalelement von A gleich Null, so kann der Gauß-Algorithmus keine n führenden Einsen mehr erzeugen (vgl. auch Beispiel 2.9 (d)), es entsteht mindestens eine Nullzeile, sodass nach (D5), $\det A = 0 = a_{11} \cdots a_{nn}$ gilt. Sind andererseits alle Diagonalelemente von A von Null verschieden, so kann man zunächst aus jeder Zeile i den Faktor a_{ii} wegen (D1) herausziehen und erhält

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn} \det \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die nun folgenden Jordan-Schritte benutzen nur noch die elementaren Zeilenumformungen vom Typ (c), ändern also die Determinante nicht. Als Endergebnis erhalten wir die Einheitsmatrix I_n , deren Determinante nach (D3) gleich 1 ist. Damit ist (D7) gezeigt.

(D8) Zunächst bringen wir A_1 durch die elementaren Zeilenoperationen (a) und (c) auf Dreiecksgestalt A'_1 . Wir benutzen dabei *keine* Multiplikation von Zeilen. Angenommen, wir machten k Zeilenvertauschungen, so gilt $\det A'_1 = (-1)^k \det A_1$, nach (D3). Dabei ging C in eine Matrix C' über wogegen A_2 unverändert blieb. Ferner gilt nach (D1)

$$\det A = (-1)^k \det \begin{pmatrix} A'_1 & C' \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Nun bringt man analog A_2 durch die elementaren Zeilentransformationen (a) und (c) (ohne (b)) auf Dreiecksgestalt A'_2 , etwa mit l Zeilenvertauschungen. Dabei ändern sich A'_1 und C' nicht. Somit gilt einerseits $\det A_2 = (-1)^l \det A'_2$ und andererseits:

$$\det A = (-1)^{k+l} \det A' = (-1)^{k+l} \det \begin{pmatrix} A'_1 & C' \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}$$

Da aber A'_1 und A'_2 beides obere Dreiecksmatrizen sind und im linken unteren Block nur Nullen stehen, ist insgesamt A' eine obere Dreiecksmatrix. Nach (D7) gilt dann $\det A' = \det A'_1 \det A'_2$, also

$$\det A = (-1)^k \det A'_1 (-1)^l \det A'_2 = \det A_1 \det A_2.$$

(D9) Ist $\operatorname{rg} A < n$, so liefert der Gauß-Algorithmus mindestens eine Nullzeile und damit ist nach (D4), $\det A = 0$.

Sei umgekehrt $\operatorname{rg} A = n$. Wendet man den Gauß-Jordan-Algorithmus auf A an, so wird in jedem Schritt die Determinante mit einer von Null verschiedenen Zahl multipliziert, bei (a) mit -1 , bei (b) mit $\lambda \neq 0$ und bei (c) mit 1 , und man endet mit $r = n$ führenden Nullen bzw. mit der Einheitsmatrix. Nach (D3) ist aber $\det I_n = 1$, also war $\det A \neq 0$.

(D10) Wir argumentieren ähnlich wie in (D9) und zeigen, dass sämtliche Werte $\det A$ festliegen. Angenommen, $\operatorname{rg} A < n$, dann ist nach (D9), $\det A = 0$. Ist hingegen $\operatorname{rg} A = n$, so liefert der Gauß-Jordan-Algorithmus nach endlich vielen elementaren Zeilenoperationen vom Typ (a), (b) und (c) die Einheitsmatrix. Dabei gilt für den Übergang von A nach A' mittels Zeilenoperation:

$$(a) \det A = -\det A', \quad (b) \det A = \lambda \det A', \quad (c) \det A = \det A'.$$

In jedem Fall erhalten wir $\det A$ als Produkt von Faktoren -1 , $\lambda \neq 0$ und $+1$, wobei der letzte Faktor gleich $\det I_n = 1$ ist. Somit ist $\det A$ berechenbar und liegt fest. ■

Beispiel 4.1 (a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(D2)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(D1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(D1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(D7)}{=} 3.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix} = -bc.$$

Ist $a \neq 0$, so addiert man das $-\frac{c}{a}$ -fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile und erhält dann mit (D7)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Somit gilt allgemein

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

auch für $a = 0$; wir leiteten die bereits aus Abschnitt 1.3 bekannte Formel ab.

(c) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *schiefssymmetrisch*, wenn $A^T = -A$. Nach (b) gilt für die schiefssymmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = b^2$. Wir berechnen die Determinante einer schiefssymmetrischen 3×3 -Matrix:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

Addiert man nun zur Zeile 3 das $\frac{c}{a}$ fache der Zeile 1 und das $-\frac{b}{a}$ fache der Zeile 2, so ist die neue dritte Zeile eine Nullzeile und daher folgt aus (D5), dass $\det A = 0$.

4.2 Gruppen

Um einige Eigenschaften der Determinante beweisen zu können, benötigen wir den Begriff der Permutationsgruppe und des Charakters einer Permutation.

Definition 4.2 (a) Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer Operation $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto ab$, genannt *Gruppenoperation* oder Gruppenmultiplikation, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(G1) Es gilt das Assoziativgesetz $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in G$.

(G2) Es gibt ein *neutrales Element* $e \in G$, sodass für alle $a \in G$ gilt $ae = ea = a$.

(G3) Zu jedem Element $a \in G$ gibt es ein *Inverses Element* a^{-1} , sodass gilt $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Gilt außerdem das Kommutativgesetz $ab = ba$ für alle $a, b \in G$, so heißt G *abelsch*.

(b) Ein *Gruppenhomomorphismus* ist eine Abbildung $f: G \rightarrow H$ einer Gruppe G in eine Gruppe H , für die gilt

$$f(gg') = f(g)f(g') \quad \text{für alle } g, g' \in G. \quad (4.1)$$

Beispiel 4.2 (a) Jeder Körper $\mathbb{K}$ bildet bezüglich der Addition mit dem neutralen Element 0 eine abelsche Gruppe $(\mathbb{K}, +, 0)$. Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so ist $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe. Jeder Vektorraum V bildet bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe $(V, +, 0)$. Jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Es sei X eine beliebige nichtleere Menge. Dann ist

$$\mathbf{S}(X) = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, $(\mathbf{S}(X), \circ, \text{id}_X)$, wobei das neutrale Element die identische Abbildung id_X ist und die Umkehrabbildung f^{-1} die zu f inverse Abbildung ist.

Beweis. (1) Abgeschlossenheit. Es seien $g, f \in \mathbf{S}(X)$. Nach Übungsaufgabe 1.4 ist die Komposition $g \circ f$ wieder bijektiv; also $g \circ f \in \mathbf{S}(X)$.

- (2) Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ nach Lemma 1.1.
 (3) Die Identität ist bijektiv, $\text{id}_X \in \mathbf{S}(X)$ und es gilt $\text{id}_X \circ f = f \circ \text{id}_X = f$ für alle $f \in \mathbf{S}(X)$.
 (4) Wenn $f \in \mathbf{S}(X)$, so existiert die inverse Abbildung f^{-1} und ist ebenfalls bijektiv; ferner gilt $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_X$. Damit sind alle Gruppenaxiome erfüllt, $(\mathbf{S}(X), \circ, \text{id}_X)$ ist eine Gruppe. ■

(c) Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so bildet $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, die Menge der invertierbaren Matrizen, eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix I_n und A^{-1} ist das zu A inverse Element. Ist V ein Vektorraum, so ist die Menge der Automorphismen, $\text{GL}(V)$ eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung. Es ist $\text{GL}(V) \subset \mathbf{S}(V)$ eine Untergruppe.

4.2.1 Die symmetrische Gruppe

Permutationen

In diesem Abschnitt wollen wir das Beispiel 4.2 (b) mit einer endlichen Menge $X = \{1, 2, \dots, n\}$ genauer studieren. In diesem Falle schreiben wir $\mathbf{S}(X) =: \mathbf{S}_n$ und nennen diese Gruppe die *symmetrische Gruppe* von n Elementen. Die Elemente der Menge sind die bijektiven Abbildungen $f: X \rightarrow X$. Diese Abbildungen heißen auch *Permutationen* von X . Wir wollen Permutationen als zweireihige Schemas aufschreiben, wobei in der ersten Zeile die Elemente von X (möglicherweise ungeordnet) stehen und darunter in der zweiten Zeile ihre Bilder:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 4.3 Die 6 Elemente von $\mathbf{S}_3$ sind

$$\begin{aligned} \text{id} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & s_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & s_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ s_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & z_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & z_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

In diesem Falle ist

$$s_1 \circ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = z_1,$$

während $s_2 \circ s_1 = z_2$ gilt. Man beachte, dass wie immer bei Abbildungen zuerst die rechtsstehende und dann die links stehende Permutation ausgeführt wird.

Bemerkung 4.1 (a) Die Gruppe $\mathbf{S}_n$ ist für $n \geq 3$ nicht abelsch. Die Gruppen $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ bestehen jeweils nur aus einem bzw. aus zwei Elementen und sind beide abelsch.

(b) Durch vollständige Induktion beweist man, dass $\#\mathbf{S}_n = n!$.

Wir werden Permutationen oft mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen. So ist zum Beispiel die zu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ inverse Permutation gleich

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Der Charakter einer Permutation

Definition 4.3 Es sei $\pi \in \mathbf{S}_n$ eine Permutation.

(a) Als *Inversion* (oder „Fehlstellung“) von π bezeichnen wir ein Paar (i, j) , $i, j \in X$, $i < j$ mit $\pi(i) > \pi(j)$.

Wir bezeichnen mit $\text{inv}(\pi)$ die Anzahl der Inversionen von π und nennen $\text{sign}(\pi) = (-1)^{\text{inv}(\pi)}$ den *Charakter* der Permutation π . Ist $\text{sign}(\pi) = 1$, so heißt π *gerade*, ist hingegen $\text{sign}(\pi) = -1$, so nennt man π *ungerade*.

So haben die Permutationen s_1 und s_2 aus Beispiel 4.3 jeweils eine Inversion, nämlich $(1, 2)$ bzw. $(2, 3)$, wogegen s_3 drei Inversionen $(1, 2)$, $(1, 3)$ und $(2, 3)$ besitzt:

$$\text{inv}(\text{id}) = 0, \quad \text{inv}(s_1) = \text{inv}(s_2) = 1, \quad \text{inv}(s_3) = 3, \quad \text{inv}(z_1) = \text{inv}(z_2) = 2.$$

Somit gilt für die Charaktere der Permutationen

$$\text{sign}(\text{id}) = \text{sign}(z_1) = \text{sign}(z_2) = 1, \quad \text{sign}(s_1) = \text{sign}(s_2) = \text{sign}(s_3) = -1.$$

Lemma 4.2 Es seien $\pi, \sigma \in \mathbf{S}_n$.

(a) Dann gilt

$$\text{sign} \pi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}.$$

(b) $\text{sign}(\pi \circ \sigma) = \text{sign} \pi \text{sign} \sigma$. Insbesondere gilt $\text{sign} \pi = \text{sign} \pi^{-1}$.

Beweis. (a) Zunächst überlegt man sich, dass im Zähler und im Nenner des Bruchs jeweils sämtliche Differenzen zweier voneinander verschiedener Zahlen j und i vorkommen, eventuell aber mit unterschiedlichem Vorzeichen. Damit ist das Produkt gleich 1 oder -1 . Genau dann, wenn $\pi(j) < \pi(i)$, wenn also (i, j) eine Inversion ist, kommt ein negatives Vorzeichen hinzu. Die Gesamtzahl der negativen Vorzeichen ist also $\text{inv}(\pi)$, sodass das Produkt gleich $\text{sign} \pi$ ist.

(b) Nach (a) gilt

$$\text{sign}(\pi \sigma) = \prod_{i < j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{j - i} = \prod_{i < j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{j < i} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Der zweite Faktor ist nach (a) gleich $\text{sign} \sigma$. Also genügt es zu zeigen, dass das erste Produkt gleich $\text{sign} \pi$ ist. Nun gilt aber

$$\prod_{i < j} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$

Vertauscht man im zweiten Faktor die Rolle von i und j , so ändert sich am Bruch $\frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$ und man kann fortsetzen mit

$$= \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{\substack{i > j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}.$$

Nun kann man beide Produkte wieder zu einem Produkt zusammenfassen:

$$= \prod_{\sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\pi(\sigma(j)) - \pi(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}.$$

Da σ bijektiv ist, durchlaufen $r = \sigma(i)$ und $s = \sigma(j)$ alle Zahlen von 1 bis n , also

$$= \prod_{r < s} \frac{\pi(s) - \pi(r)}{s - r} = \text{sign } \pi.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. Wegen $\text{sign id} = 1$ folgt $\text{sign } \sigma \text{sign } \sigma^{-1} = \text{sign id} = 1$ und damit folgt die zweite Behauptung $\text{sign } \sigma = \text{sign } \sigma^{-1}$. ■

Bemerkung 4.2 (a) Ist $H = \{-1, 1\}$ die Gruppe aus 2 Elementen bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation, so ist $\text{sign} : \mathbf{S}_n \rightarrow H$ nach (b) ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Multipliziert man nacheinander die Menge der geraden Permutationen $\mathbf{A}_n$ mit der Permutation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$, so entstehen nach obigem Lemma nur ungerade Permutationen, denn $\text{sign } \tau = -1$ (τ hat genau eine Inversion). Aus verschiedenen geraden Permutationen σ_1 und σ_2 erhält man dadurch aber auch verschiedene ungerade Permutationen $\tau\sigma_1$ und $\tau\sigma_2$. Es gibt also genauso viele gerade wie ungerade Permutationen, nämlich $\#\mathbf{A}_n = \frac{n!}{2}$.

4.3 Rechnen mit Determinanten

Zunächst wollen wir (D1) formalisieren bzw. auf mehrere Summanden erweitern.

Lemma 4.3 Es sei $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Determinantenfunktion. Dann gilt für alle $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{j_1} \\ \mathbf{e}_{j_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{j_n} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Dabei haben wir n Summen, die jeweils von $1, \dots, n$ laufen, also n^n Summanden.

Beweis. Wir fixieren die Zeilen 2 bis n und schreiben die erste Zeile mit Hilfe der Basiszeilenvektoren $\mathbf{e}_{j_1} \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ als $a_1 = \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \mathbf{e}_{j_1}$. Wegen (D1) gilt dann

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \mathbf{e}_{j_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{j_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Macht man dasselbe mit der 2. Zeile $a_2 = \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2} e_{j_2}$, so erhält man

$$\det A = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Setzt man dies fort bis zur n ten Zeile, so erhält man die Behauptung. ■

Zum Beispiel haben wir

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = a \left(c \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + b \left(c \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= ac \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + bd \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4.3.1 Leibnizdefinition der Determinante

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, wie man die Berechnung jeder Determinante zurückführen kann auf die Berechnung der n^n Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}, \quad j_1, \dots, j_n = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

die nur aus Nullen und n Einsen bestehen. Nach Determinateneigenschaft (D4) sind aber alle diejenigen Determinanten gleich Null, die mindestens zwei gleiche Zeilen haben, wo also der Rang der entsprechenden Matrix kleiner als n ist. Die Determinanten (4.3) sind daher von Null verschieden, wenn sie vollen Rang n haben. Das ist genau dann der Fall, wenn in jeder Spalte der Matrix (4.3) genau eine Eins steht bzw., wenn alle Indizes $j_1, j_2, \dots, j_n$ paarweise voneinander verschieden sind. Das n -Tupel $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ stellt also eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ dar. Somit vereinfacht sich die Formel (4.2) zu

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Wir kehren nun zum Gauß-Algorithmus zurück, um die Determinante der *Permutationsma-*

trix $P_\sigma = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ zu berechnen. Dabei gehen wir wie folgt vor: Wir vertauschen zwei benachbarte Zeilen, wenn in der oberen Zeile i die Eins rechts von der Eins in der darunter

liegenden Zeile $i + 1$ steht, wenn also $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$. In diesem Falle ist $(i, i + 1)$ eine Inversion der Permutation σ . Durch den Tausch geht die Permutation σ in eine neue Permutation σ' über, die *genau eine* Inversion weniger hat als σ , $\text{inv } \sigma' = \text{inv } \sigma - 1$. In der Tat, ist (k, i) eine Inversion von σ , so ist $(k, i + 1)$ eine Inversion von σ' ; war $(k, i + 1)$ eine Inversion von σ , so ist nach dem Tausch (k, i) eine Inversion von σ' . Waren schließlich (i, j) bzw. $(i + 1, j)$ Inversionen von σ , so sind $(i + 1, j)$ bzw. (i, j) Inversionen von σ' . Weitere Inversionen kann σ' nicht haben. Nach genau $\text{inv } \sigma$ Nachbarzeilenvertauschungen, haben wir also die Einheitsmatrix aus P_σ hergestellt. Somit gilt nach (D2) und (D3):

$$\det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = (-1)^{\text{inv } \sigma} \det I_n = \text{sign } \sigma.$$

Satz 4.4 (Leibnizdefinition) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Determinantenfunktion $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$. Sie ist gegeben durch

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (4.5)$$

Beweis. Wir haben oben gesehen: Wenn es überhaupt eine Determinantenfunktion gibt, so muss sie (4.5) erfüllen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die durch (4.5) gegebene Funktion tatsächlich die Bedingungen (D1), (D2) und (D3) einer Determinante erfüllt.

In der Tat ist (D1) erfüllt, denn ersetzt man bei fixiertem Zeilenindex i die Matrixelemente $a_{i\sigma(i)}$ durch $\lambda b_{i\sigma(i)} + \mu c_{i\sigma(i)}$, so ist

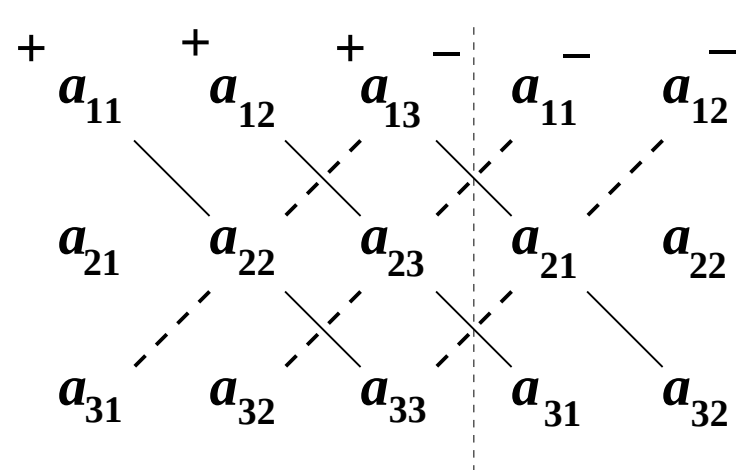
$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda b_{i\sigma(i)} + \mu c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \\ &\quad \mu \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \det A' + \mu \det A''. \end{aligned}$$

Die Vertauschung zweier Zeilen i und j , $i \neq j$, kann man durch die Multiplikation von σ mit der Permutation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ korrigieren. Man beachte, dass $\text{sign } \tau = -1$ eine ungerade Permutation ist. Es sei A' die Matrix mit den vertauschten Zeilen a_i und a_j , wobei $i < j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \, a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdots a_{j,(\sigma\tau)(j)} \cdots a_{i,(\sigma\tau)(i)} \cdots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\ &= \sum_{\sigma\tau \in S_n} (-1) \text{sign } (\sigma\tau) \, \sigma \, a_{1,\sigma\tau(1)} \cdots a_{n,\sigma\tau(n)} = -\det A. \end{aligned}$$

Schließlich ist klar, dass die Leibnizdefinition die Normierungsbedingung erfüllt, denn in (4.5) bleibt ein einziger Summand übrig, nämlich der zur identischen Permutation: $\det I_n = \sum_{\sigma=\text{id}} \text{sign}(\text{id}) \, a_{11} \cdots a_{nn} = 1$. ■

Beispiel 4.4 Mit Hilfe der Leibnizdefinition berechnen wir $\det A$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$. Die symmetrische Gruppe $\mathbf{S}_3$ besitzt drei gerade Permutationen id , z_1 und z_2 und drei ungerade Permutationen s_1 , s_2 und s_3 , also gilt

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$


Dasselbe Ergebnis erhält man mit der Sarrusschen Regel: Achtung, sie gilt nur für 3×3 -Matrizen. Man schreibt zunächst die beiden ersten Spalten als vierte und fünfte Spalte hinten an und berechnet die sechs Produkte auf den entstehenden Haupt- und Nebendiagonalen.

Lemma 4.5 Für eine quadratische Matrix A gilt $\det A = \det A^\top$.

Beweis. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann ist $A^\top = (a_{ji})$ und

$$\begin{aligned} \det A^\top &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \text{sign } \sigma \, a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \text{sign } \sigma \, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in \mathbf{S}_n} \text{sign } \sigma^{-1} \, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det A. \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir Lemma 4.2 (b) und den Fakt, dass mit σ auch σ^{-1} die gesamte $\mathbf{S}_n$ durchläuft. ■

Folgerung 4.6 Für die Determinantenfunktion $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ gilt

(D1') $\det$ ist linear in jeder Spalte j , $j = 1, \dots, n$, das heißt, ist $\alpha_j = \lambda\beta_j + \mu\gamma_j$, $\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{K}^{n \times 1}$, so ist

$$\det(\alpha_1, \dots, \lambda\beta_j + \mu\gamma_j, \dots, \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \dots, \beta_j, \dots, \alpha_n) + \mu \det(\alpha_1, \dots, \gamma_j, \dots, \alpha_n).$$

(D2') Vertauscht man in A zwei Spalten α_i und α_j , so ändert sich bei der Determinante das Vorzeichen.

(D5') Besitzt A zwei identische Spalten oder eine Nullspalte, so ist $\det A = 0$.

(D6') Entsteht die Matrix A' aus A indem man zur j ten Spalte von A das λ fache der i ten Spalte addiert und alle anderen Spalten unverändert lässt, so gilt $\det A' = \det A$.

(D7') Für eine untere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gilt $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Beweis. Die Eigenschaften folgen alle aus den entsprechenden „Zeileneigenschaften“, da beim Transponieren Zeilen in Spalten über gehen und $\det A = \det A^\top$. ■

Bemerkung 4.3 Analog zum Gauß-Jordan-Algorithmus kann man daher die Determinante auch durch die drei elementaren *Spaltenoperationen* berechnen: (a) Multiplikation einer Spalte mit einer von Null verschiedenen Zahl λ , (b) Vertauschung zweier Spalten und (c) Addition des μ -fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte. Dabei muss man bei (a) und (b) den Faktor λ bzw. (-1) beachten.

Natürlich kann man auch beliebige elementare Zeilen- und Spaltenoperationen miteinander koppeln.

4.3.2 Entwicklungssätze und inverse Matrix

Wir geben hier eine dritte praktische Möglichkeit an, Determinanten zu berechnen.

Wir beginnen mit einer einfachen Überlegung, die aus (D8) und (D8') folgt. Dazu sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A \end{pmatrix} = \det A. \quad (4.6)$$

Dabei steht $*$ für einen beliebigen Zeilen- bzw. Spaltenvektor.

Satz 4.7 (Zeilentwicklungssatz) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ bezeichne die Matrix, die aus A dadurch entsteht, dass man die i te Zeile und die j te Spalte streicht.

Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \quad (4.7)$$

Man nennt (4.7) die *Entwicklung der Determinante nach der i ten Zeile*.

Beweis. Für alle i, j bezeichne A'_{ij} die $n \times n$ -Matrix, die aus A entsteht, indem man alle Einträge der i ten Zeile und alle Einträge der j ten Spalte Null setzt bis auf das Element $a'_{ij} = 1$,

das Eins gesetzt wird. Wegen der Linearität von $\det A$ in der i ten Zeile folgt wie im Beweis von (4.2)

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \det A'_{ij},$$

wobei wir die Elemente der j ten Spalte zu Null gemacht haben (bis auf $a_{ij} = 1$) mit Hilfe der dritten elementaren Spaltenoperation. Nun tauschen wir die i te Zeile von A'_{ij} schrittweise nach oben in die erste Zeile und die j te Spalte schrittweise nach vorn in die erste Spalte, wobei wir die Reihenfolge der jeweils anderen Zeilen und Spalten beibehalten. Dazu sind genau $i - 1$ Nachbarzeilenvertauschungen und $j - 1$ Nachbarspaltenvertauschungen nötig, sodass

$$\det A'_{ij} = (-1)^{i-1+j-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Setzt man dies oben ein, so folgt die Behauptung. ■

Folgerung 4.8 (Spaltenentwicklungssatz) *Mit den Bezeichnungen des Zeilenentwicklungssatzes gilt für alle $j = 1, \dots, n$:*

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \quad (4.8)$$

Man nennt (4.8) die *Entwicklung der Determinante nach der j ten Spalte*. Der Beweis folgt sofort aus dem Zeilenentwicklungssatz, zusammen mit $\det A = \det A^\top$.

Man beachte bei den Entwicklungssätzen die schachbrettartige Anordnung der Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.5 (a) Die Entwicklung von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ nach der 2. Zeile liefert

$$\det A = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

(b) Entwicklung nach der 2. Spalte und dann nach der 3. Zeile liefert:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5) 9 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -45 \cdot 7 = -315.$$

Satz 4.9 (Inverse Matrix) *Es sei $A = (a_{ij}) \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix, und es sei $d_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.*

Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (d_{ij})_{i,j=1 \dots n}. \quad (4.9)$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $(AB)_{ij} = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, dabei ist B die Matrix auf der rechten Seite von (4.9). Für $i = j$ ist in der Tat nach dem Zeilenentwicklungssatz

$$(AB)_{ii} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+i} \det A_{ik} = \frac{\det A}{\det A} = 1.$$

Für $i \neq j$ haben wir

$$(AB)_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{ik} \det A_{jk}. \quad (4.10)$$

Ersetzt man in der Matrix A die j te Zeile durch die i te Zeile, so erhält man eine Matrix A' mit $\det A' = 0$ wegen (D5). Entwickelt man nun A' nach der j ten Zeile, so erhält man die Unterdeterminanten $\det A_{jk}$ mit den Koeffizienten $(-1)^{k+j} a_{ik}$, also genau die Formel der rechten Seite von (4.10). Folglich gilt

$$(AB)_{ij} = \frac{1}{\det A} \det A' = 0.$$

■

Beispiel 4.6 (a) Für eine reguläre Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Für eine reguläre Matrix $A = (a_{ij}) \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$ gilt

$$(A^{-1})_{13} = \frac{1}{\det A} (-1)^{1+3} \det A_{31} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

4.3.3 Multiplikationssatz und die Determinante und Spur von $T \in L(V)$

Satz 4.10 (Multiplikationssatz) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt $\det(AB) = \det A \det B$.

Beweis. Wir benutzen die Leibnizdefinition für $C = AB$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$:

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1\sigma(1)} \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2} b_{j_2\sigma(2)} \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} b_{j_n\sigma(n)} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma b_{j(1)\sigma(1)} b_{j(2)\sigma(2)} \cdots b_{j(n)\sigma(n)} \end{aligned}$$

Ist nun $j = (j_1, \dots, j_n)$ keine Permutation von $\{1, \dots, n\}$, so ist der entsprechende Summand $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma b_{j(1)\sigma(1)} b_{j(2)\sigma(2)} \cdots b_{j(n)\sigma(n)}$ gleich Null, da die Matrix zwei identische Zeilen hat.

Wir können uns also auf Permutationen $j = (j(1), \dots, j(n)) \in \mathbf{S}_n$ beschränken. Durch Umordnen der Faktoren $b_{j(1)\sigma(1)} b_{j(2)\sigma(2)} \cdots b_{j(n)\sigma(n)}$ erhalten wir $b_{1,j^{-1}\sigma(1)} b_{2,j^{-1}\sigma(2)} \cdots b_{n,j^{-1}\sigma(n)}$. Wegen $\text{sign } j^{-1} = \text{sign } j$ gilt:

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{j \in \mathbf{S}_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \text{sign } j \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \text{sign } j^{-1} \text{sign } \sigma b_{1,j^{-1}\sigma(1)} b_{2,j^{-1}\sigma(2)} \cdots b_{n,j^{-1}\sigma(n)} \\ &= \sum_{j \in \mathbf{S}_n} \text{sign}(j) a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det B = \det A \det B. \end{aligned}$$

■

Folgerung 4.11 (a) Es sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
 (b) Einander ähnliche quadratische Matrizen haben dieselbe Determinante.

Beweis. (a) Nach dem Multiplikationssatz ist $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$. Hieraus folgt (a).

(b) Nach dem Multiplikationssatz und (a) gilt $\det AMA^{-1} = \det A \det M (\det A)^{-1} = \det M$.

■

Bemerkung 4.4 (a) Man kann nun die Determinante einer *linearen Abbildung* $T: V \rightarrow V$, wie folgt sinnvoll definieren. Es sei B eine endliche Basis von V . Wir setzen **det** $T := \det M_{B,B}(T)$ und nennen diese Zahl die **Determinante** von T . Diese Definition hängt wegen der Transformationsformel für Endomorphismen, $M' = AMA^{-1}$ und wegen Folgerung 4.11 (b) nicht von der speziellen Wahl der Basis B ab.

So erhalten wir im Beispiel 3.3 (d) als Determinante des Verschiebungsoperators $V_a \in L(\mathbb{R}_2[x])$, $\det V_a = 1$ und für die Differentiation $D: V \rightarrow V$ auf den trigonometrischen Polynomen höchstens zweiten Grades (siehe Übungsaufgabe 6.3) gilt $\det D = 0$, da die Matrixdarstellung von D eine Nullspalte hat.

(b) Für eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definieren wir die **Spur** von A als **tr** $A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$; die Spur von A ist also die Summe der Hauptdiagonalelemente von A . Es gilt für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\text{tr } AB = \text{tr } BA.$$

In der Tat ist

$$\text{tr } AB = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jk} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \text{tr } BA.$$

Hieraus folgt, dass einander ähnliche Matrizen M und M' die gleiche Spur haben. Es ist nämlich

$$\text{tr } M' = \text{tr}(A^{-1} \cdot MA) = \text{tr}(MA \cdot A^{-1}) = \text{tr}(MI_n) = \text{tr } M.$$

Wir definieren die **Spur** eines linearen Endomorphismus $T \in L(V)$, $\dim V < \infty$ über die Spur einer Darstellungsmatrix $M_{B,B}(T)$:

$$\text{tr } T := \text{tr } M_{B,B}(T).$$

Da ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben, liefert diese Definition für alle Basen von V dieselbe Zahl. So ist z. B. $\text{tr}(\text{id}_V) = \dim V$, $\text{tr} D = 0$ (Differentiation $D \in L(\mathbb{R}_3[x])$), $\text{tr} V_a = \dim V$ als lineare Abbildung $V_a: V \rightarrow V$.

4.4 Einfache Anwendungen der Determinante

4.4.1 Cramersche Regel

Wie im Abschnitt über Entwicklungssätze bezeichnen wir die Spalten einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, wobei hier $e_i \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ den i ten Spalteneinheitsvektor bezeichnet.

Satz 4.12 (Cramersche Regel – Gabriel Cramer, 1704–1752) *Es sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ ein Spaltenvektor. Dann erhält man die Lösung $x \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ folgendermaßen: Man ersetzt in der Matrix A die i te Spalte α_i durch die rechte Seite b und berechnet die entsprechende Determinante. Für $i = 1, \dots, n$ ist dann*

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, b, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$$

Also ist

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Für die Lösung x hat man die folgende Identität in Spaltenvektoren: $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = b$. Da die Determinante linear in den Spalten ist, (D1)', gilt:

$$\begin{aligned} \det(b, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \det(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &= x_1 \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + x_2 \det(\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \dots + x_n \det(\alpha_n, \dots, \alpha_n) \\ &= x_1 \det A. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für x_1 ; analog beweist man sie für $x_2, \dots, x_n$. ■

4.4.2 Ebene Geometrie

Mit Hilfe von Determinanten lassen sich Geraden und Kreise besonders elegant darstellen.

Lemma 4.13 *Sind $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$, dann liegt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ genau dann auf der Geraden durch A und B , wenn*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Beweis. In (4.11) subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und der dritten und entwickeln dann die Determinante nach der 3. Spalte:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu $(x_1 - a_1)(b_2 - a_2) - (x_2 - a_2)(b_1 - a_1) = 0$ und falls $b_2 \neq a_2$ weiter zu $\frac{x_1 - a_1}{x_2 - a_2} = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - a_1}$, der bekannten 2-Punkte-Gleichung der Geraden. ■

Lemma 4.14 Gegeben seien drei Punkte $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$ der Ebene $\mathbb{R}^2$, die nicht alle zusammen fallen. Dann gibt es genau einen Kreis h oder eine Gerade h durch A , B und C . Ein variabler Punkt $X = (x_1, x_2)$ liegt auf h genau dann, wenn

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.4.3 Lineare Unabhängigkeit von Polynomen

Lemma 4.15 Die Menge der Monome $B = \{1, x, x^2, \dots\}$ bildet eine Basis im Vektorraum $\mathbb{R}[x]$.

Beweis. Nach Beispiel 2.3 (c) ist B erzeugend für $\mathbb{R}[x]$. Wir müssen die lineare Unabhängigkeit noch zeigen. dazu müssen wir die lineare Unabhängigkeit jeder endlichen Teilmenge $B_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ nachweisen. Angenommen

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} = 0$$

in $\mathbb{R}[x]$ für eine gewisse Linearkombination der Monome. Dann muss diese Identität insbesondere für n verschiedene paarweise verschiedene x -Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ gelten:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \dots + \alpha_{n-1} x_i^{n-1} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dies ist nun ein lineares Gleichungssystem in den Variablen α_i , $i = 0, \dots, n-1$ mit der quadratischen $n \times n$ -Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist eine Vandermondsche Determinante, diese ist nach Übungsaufgabe 9.2 gleich

$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Da die x_i als paarweise verschieden gewählt wurden, ist $x_j - x_i \neq 0$ für alle Paare (i, j) , $i \neq j$, also ist $\det A \neq 0$; das homogen lineare Gleichungssystem $A\alpha = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Damit ist B_n linear unabhängig und B ist eine Basis. ■

Literaturverzeichnis

- [Ant98] H. Anton. *Lineare Algebra. Einführung, Grundlagen, Übungen.* Spectrum Lehrbuch. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1998.
- [Jän04] K. Jänich. *Lineare Algebra.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 10 edition, 2004.
- [Koe97] M. Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Springer-Verlag, Berlin, 4 edition, 1997.
- [Kow79] H.-J. Kowalsky. *Lineare Algebra.* De Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1979.

PD Dr. A. Schüler
Mathematisches Institut
Universität Leipzig
04009 Leipzig
`Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de`