Kapitel 2

Vektorräume

Vektorräume, nicht Vektoren, bilden den Hauptgegenstand der linearen Algebra. Vektoren heißen die Elemente des Vektorraumes. Um zu klären, was ein Vektor ist, benötigt man also vorher den Begriff des *Vektorraumes*.

2.1 Definition, Eigenschaften, Beispiele

Die im Folgenden rot markierten Abschnitte sind in der Vorlesung nicht dran gewesen und sind als ergänzende Bemerkung eingefügt.
Es sei im Folgenden $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$.

Definition 2.1 Eine Menge V heißt *Vektorraum über* $\mathbb{K}$, wenn in V eine Addition $+$ und eine skalare Vervielfachung $\cdot$ definiert sind, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. **Axiome der Addition**. $(V,+,0)$ ist eine abelsche Gruppe, das heißt,

   (A1) $\forall x,y \in V: x+y \in V$. (Abgeschlossenheit)

   (A2) $\forall x,y \in V: x+y = y+x$ (Kommutativgesetz).

   (A3) $\forall x,y,z \in V: x+(y+z) = (x+y)+z$. (Assoziativgesetz)

   (A4) Es gibt ein neutrales Element $0 \in V$, so dass $\forall x \in V: x+0 = 0+x = x$. (Nullelement)

   (A5) Zu jedem $x \in V$ gibt es ein Inverses $-x \in V$ mit $x+(-x) = (-x)+x = 0$.

2. **Axiome der skalaren Vervielfachung**

   (S1) $\forall x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}: \lambda x \in V$ (Abgeschlossenheit)

   (S2) $\forall x \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

   (S3) $\forall x \in V: 1x = x$

3. **Distributivgesetze**

(D1) $\forall x,y \in V, \lambda \in \mathbb{K}: \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

(D2) $\forall\, x \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \colon (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$

Andere Sprechweisen: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt V *reeller Vektorraum* oder *reeller linearer Raum*; im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt V *komplexer Vektorraum* oder *komplexer linearer Raum.*

2.1.1 Einfachste Eigenschaften

Wir schreiben $v - w$ für $v + (-w)$. Wie bei den Schlussfolgerungen aus den Körperaxiomen (A1) bis (A5)(vgl. Analysis 1), gilt auch hier

1. $\forall\, x, y, z \colon x + y = x + z \Longrightarrow y = z$. (Kürzungsregel)
2. $\forall\, x, y \in V \colon x + y = x \Longrightarrow y = 0$. (Eindeutigkeit des Nullvektors)
3. $\forall\, x, y \in V \colon x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$ (Eindeutigkeit des Inversen)
4. $\forall\, x \in V \colon -(-x) = x$.

Lemma 2.1 *Neue Eigenschaften, die für alle $x \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten:*

5. $0 \cdot x = 0$.

6. $\alpha \cdot 0 = 0$.

7. $(-1) \cdot x = -x$.

Beweis. 5. Nach Distributivgesetz (D2) ist $0v = (0+0)v = 0v + 0v$. Wendet man nun 2. an mit $x = y = 0v$, so hat man $0v = 0$.
6. Nach Distributivgesetz ist $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$. Wieder folgt mit 2. $\alpha \cdot 0 = 0$.
7. Es gilt nach (S2), (D2) und 5.: $(-1)x + x = (-1)x + 1x = ((-1)+1)x = 0 \cdot x = 0$. Folglich ist nach 3. $(-1)x = -x$.

■

Beispiel 2.1 (a) $\mathbb{K}$ selbst ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
(b) $\mathbb{K}^{m \times n}$. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ bilden einen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Insbesondere ist der $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1 \times n} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 1, \dots, n\}$ der Raum der Vektoren mit n reellen Koordinaten ein reeller Vektorraum. Ebenso sind der $\mathbb{C}^n$ und der $\mathbb{Q}^n$ definiert als Raum der Spalten- oder Zeilenvektoren. **Vereinbarung:** Wir bezeichnen sowohl den Raum der Zeilenvektoren als auch den Raum der Spaltenvektoren mit $\mathbb{R}^n$. Aus dem Kontext heraus sollte jeweils klar sein, welchen $\mathbb{R}^n$ wir meinen.
Wir identifizieren auch die klassischen „geometrischen" Vektoren der Ebene und des Raumes mit den Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ bzw. aus $\mathbb{R}^3$. Ein geometrischer Vektor der Ebene ist eine Pfeilklasse, die durch Länge, Richtung und Richtungssinn charakterisiert ist. Unter allen Pfeileneiner Klasse gibt es einen, der im Ursprung (eines gedachten Koordinatensystems)angreift, $\overrightarrow{OP}$. Wenn P die Koordinaten (x_1, x_2) hat, so identifizieren wir $\overrightarrow{OP}$ und $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Man überzeugt sich leicht, dass die Addition und Vervielfachung geometrischer Vektoren mit den

Vektorraumoperationen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ verträglich sind. Das bedeutet, wenn $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$ mit $P=(x_1,x_2)$, $Q=(y_1,y_2)$, so gilt $R=(x_1+y_1,x_2+y_2)$.
(c) $\mathbb{C}^n$ ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
(d) **Abb(X,V)**. Es sei X eine beliebige Menge und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann ist $\mathrm{Abb}(X,V)$ die Menge aller Abbildungen von X nach V. Diese kann man wiefolgt addieren und skalar vervielfachen. Für $f,g\in\mathrm{Abb}(X,V)$ und $\lambda\in\mathbb{K}$ sei :

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),\quad (\lambda f)(x):=\lambda f(x).$$

Auf diese Weise wird $\mathrm{Abb}(X,V)$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum.
(e) $\boldsymbol{\omega}$. Die Räume der reellen Zahlenfolgen $\omega:=\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})=\{(x_n)\mid x_n\in\mathbb{R}\}$, der konvergenten reellen Folgen c, der Nullfolgen c_0, der finiten Folgen φ, bilden reelle Vektorräume. Es gilt $\varphi\subset c_0\subset c\subset\omega$.
(f) $\mathbb{R}[x]$ sei die Menge der Polynome $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$. Fasst man $\mathbb{R}[x]\subset\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ auf, so sind in natürlicher Weise Addition und skalare Multiplikation erklärt.
(g) **$\mathrm{C}^m(\mathbb{R})$**. Es ist $\mathrm{C}^m(\mathbb{R})$ die Menge der m-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Im Falle $m=0$ schreiben wir $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ für die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Als Teilmenge $\mathrm{C}^m(\mathbb{R})\subset\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind Addition und skalare Vervielfachung wohldefiniert. So gilt etwa für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0,\\ -x^3, & x<0\end{cases}\Longrightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geq 0,\\ -3x^2, & x<0\end{cases}\Longrightarrow f''(x)=6|x|.$$

Da die Betragsfunktion bei 0 nicht differenzierbar ist, gilt $f\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ aber $f\notin\mathrm{C}^3(\mathbb{R})$.
(h) **Keinen** Vektorraum bilden endliche Intervalle $[a,b]$ oder die Menge der Vektoren $\{(\lambda,1+\lambda)\in\mathbb{R}^2\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$, denn der Nullvektor $(0,0)$ ist nicht enthalten; Die Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten bilden keinen reellen oder komplexen Vektorraum.

2.2 Lineare Unterräume

Definition 2.2 Eine Teilmenge W eines Vektorraumes V heißt *linearer Unterraum* oder *linearer Teilraum* von V, wenn W zusammen mit der Addition von V und der skalaren Multiplikation aus V wieder ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Lemma 2.2 (Unterraumkriterium) *Eine Teilmenge W eines Vektorraumes V ist genau dann linearer Teilraum von V, wenn gilt*

(N) $W\neq\varnothing$.
(A) *Für alle $w_1,w_2\in W$ ist $w_1+w_2\in W$. (Abgeschlossenheit der Addition)*
(S) *Für $\lambda\in\mathbb{K}$ und $w\in W$ gilt $\lambda w\in W$. (Abgeschlossenheit der skalaren Vervielfachung)*

Äquivalent zu (A) und (S) ist die Bedingung

(L) $\forall\, w_1, w_2 \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\colon \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W.$

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dass sämtliche Axiome aus der Vektorraumdefinition 2.1 sich auf W übertragen. Assoziativität und Kommutativität von Addition und skalarer Multiplikation sowie die Distributivgesetze sind unmittelbar klar, da sie für V und somit erst recht für eine Teilmenge W gelten. Eine Ausnahme machen lediglich die Existenzforderungen (Nullvektor und Inverses).
Nun ist aber W nichtleer, enthält also zumindest einen Vektor $a \in W$. Nach Lemma 2.1 gilt aber $0 \cdot a = 0$ und wegen der Abgeschlossenheit der skalaren Multiplikation in W also $0 \in W$. 0 ist dann auch neutral in W, weil neutral in V. Ferner gilt nach Lemma 2.1 auch $(-1)a = -a$. Somit liegt mit $a \in W$ auch das Inverse $-a \in W$. ■

Bemerkung 2.1 (a) Die leere Menge ist kein Unterraum; jeder Unterraum enthält zumindest den Nullvektor.
(b) Sind W_1 und W_2 lineare Teilräume von V, so ist auch ihr Durchschnitt $W_1 \cap W_2$ ein linearer Teilraum (Beweis: Unterraumkriterium). Diese Eigenschaft lässt sich auf beliebige Durchschnitte von endlich oder unendlich vielen Unterräumen verallgemeinern.
(c) Ist $U \subset W$ ein Unterraum und $W \subset V$ ein Unterraum, so ist auch U ein Unterraum von V.
(d) Die Vereinigung von Teilräumen ist i. a. kein Teilraum.

Beispiel 2.2 (a) Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Menge der Lösungen eines homogenen Gleichungssystems

$$U := \text{Lös}(A,0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Der Beweis folgt aus Satz 1.2, wo gezeigt wird, dass (L) gilt, nämlich wenn $Au = 0$ und $Av = 0$, dann ist auch $A(\lambda u + \mu v) = 0$. Ferner ist $U \neq \varnothing$, da der Nullvektor in U liegt.
(b) $V = \mathbb{R}^n$, i mit $1 \le i \le n$ sei eine fixierte natürlich Zahl. W sei die Menge aller reellen n-Tupel der Form $(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$. Dann ist W ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$. Dies ist ein Spezialfall von (a) mit der einzigen homogenen Gleichung $x_i = 0$; hierbei ist $A = (0\cdots 1\cdots 0)$ mit einer einzigen 1 an der Stelle k und $n-1$ Nullen.
(c) Es sei $\mathbb{R}_d[x]$ die Menge der reellen Polynome, die *höchstens* den Grad d haben; $p(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 0,\dots,d$. $\mathbb{R}_d[x]$ ist ein linearer Teilraum von $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, denn das Nullpolynom $0(x) = 0$ liegt in $\mathbb{R}_d[x]$ und wenn $q(x) = b_d x^d + \cdots + b_1 x + b_0$ ein weiteres Polynom in $\mathbb{R}_d[x]$ ist, so ist auch $(\lambda p + \mu q)(x) = \sum_{i=0}^{d}(\lambda a_i + \mu b_i)x^i$ ein Polynom in $\mathbb{R}_d[x]$.
Wir haben die folgenden Inklusionen von Unterräumen in $\text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathbb{R}_0[x] \subset \cdots \subset \mathbb{R}_d[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset \cdots C^m(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \subset \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Die Polynome genau $n$ten Grades bilden keinen Teilraum, da $p(x) = x^n$ und $q(x) = -x^n + 1$ zwar beide zu W gehören, jedoch nicht ihre Summe $p(x) + q(x) = 1$.
(d) Es sei $V \subset \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ein Teilraum, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann ist

$$U := \{f \in V \mid f(\alpha) = 0\}$$

ein linearer Teilraum von V. Hingegen ist $W = \{f \in V \mid f(\alpha) = 1\}$ kein linearer Teilraum.
(e) $V = \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fix. Es sei

$$U := \{u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}) \mid u'' + a_1 u' + a_2 u = 0\}.$$

die Menge der Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_1, a_2. U ist ein Unterraum in $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$. In der Tat ist das Unterraumkriterium erfüllt, denn aus $u_1, u_2 \in U$ folgt, dass auch $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ die Differentialgleichung erfüllt. Im Falle der Gleichung $u'' + u = 0$ erhalten wir $u(x) = \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x$ als allgemeine Lösung. Das heißt, $\{\sin x, \cos x\}$ bildet ein Erzeugendensystem für U.

2.2.1 Die lineare Hülle und Erzeugendensysteme

Es sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Jede Summe $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_k \in \mathbb{K}$, heißt *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \dots, v_n$. Man beachte, dass eine Linearkombination immer eine *endliche Summe* von Vektoren ist. Ist $n = 0$, so ist nach Vereinbarung die leere Linearkombination gleich dem Nullvektor und entsprechend gilt: $\operatorname{span}\varnothing = \{0\}$.

Definition 2.3 (a) Es sei $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge des Vektorraumes V. Dann heißt die Menge aller möglichen Linearkombinationen von Vektoren aus M

$$\operatorname{span} M := \{x \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ \exists v_1, \dots, v_n \in M : x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\}$$

die *lineare Hülle* von M in V.
(b) Gilt $\operatorname{span} M = V$, so heißt M ein *Erzeugendensystem* von V.

Beispiel 2.3 (a) Im $\mathbb{K}^n$ bilden die n *Einheitsvektoren* $\mathrm{e}_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ mit einer Eins an der $k$ten Stelle, $k = 1, \dots, n$ ein Erzeugendensystem, denn jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich schreiben als Linearkombination der Einheitsvektoren, $x = x_1 \mathrm{e}_1 + \cdots + x_n \mathrm{e}_n$.
(b) Im Raum der $m \times n$-Matrizen $\mathbb{K}^{m\times n}$ bilden die *Matrixeinsen* $\{E_{rs} \mid r = 1, \dots, m,\ s = 1, \dots, n\}$ ein Erzeugendensystem. Sie sind definiert als

$$E_{rs} = \begin{pmatrix} & & 0 & & & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix} = (\delta_{ir}\delta_{js})_{\substack{i=1\dots m,\\ j=1\dots n}}$$

wobei die einzige Eins in der $r$ten Zeile und $s$ten Spalte steht. In der Tat ist diese Menge erzeugend für $\mathbb{K}^{m\times n}$, da für jede Matrix $A = (a_{ij})$ gilt: $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$.
(c) Die Polynome $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}_d[x]$ während die Polynome $\{1, x, \dots\}$ ein Erzeugendensystem in $\mathbb{R}[x]$ bilden.

Beispiel 2.4 (Anwendung auf lineare Gleichungssysteme) (1) Sehr häufig sind wir mit der folgenden Fragestellung konfrontiert: Gegeben seien Vektoren $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$

(a) Liegt ein gegebener Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ in der linearen Hülle der $\{v_i\}$, gilt also $b \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$?
(b) Sind die Vektoren sogar ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^m$?

Schreibt man die Vektoren v_i als Spaltenvektoren

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

dann gilt $b \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$ genau dann, wenn es reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r = b$. Mit Hilfe der Spaltenvektoren kann man das so schreiben:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

was wiederum äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mr}x_r &= b_m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ist. Somit gilt

$$\boxed{b \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\} \Leftrightarrow \text{Lös}(A, b) \neq \emptyset.}$$

Das heißt, genau dann liegt b in der linearen Hülle, wenn das zugeordnete lineare Gleichungssystem konsistent ist. Jede Lösung $x = (x_1, \ldots, x_r)$ liefert eine Darstellung von b als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$. Es gilt ferner

$$\boxed{\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\} = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \ \forall\, b \in \mathbb{R}^m : \text{Lös}(A, b) \neq \emptyset.}$$

(2) Umgekehrt kann man nun die Konsistenz eines linearen Gleichungssystems nun auch mit Hilfe der Spaltenvektoren der Matrix A ausdrücken:

> Das lineare GS (2.1) ist konsistent genau dann, wenn die rechte Seite b in der linearen Hülle der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A liegt.

Lemma 2.3 (a) *Die lineare Hülle* $\operatorname{span} M$ *ist ein linearer Teilraum von* V.
(b) *Es gilt* $\operatorname{span} M = \bigcap_{W \supset M} W$, *wobei der Durchschnitt über alle linearen Teilräume* W *von* V *genommen wird, die* M *enthalten.*

Mit anderen Worten, $\operatorname{span} M$ ist der kleinste lineare Teilraum von V, der M enthält.
Beweis. (a) Wir zeigen, dass das Unterraumkriterium für $\operatorname{span} M$ erfüllt ist. Im Fall der leeren Menge ist $\operatorname{span}\varnothing = \{0\}$ ein Unterraum. Ist $M \neq \varnothing$, so ist auch $\operatorname{span} M \supseteq M$ nichtleer. Seien nun v und w jeweils endliche Linearkombinationen von Elementen aus M. Dann ist auch $v+w$ eine Linearkombination von Elementen aus M und auch λv. Das Unterraumkriterium ist erfüllt.
(b) Wegen $M \subset \operatorname{span} M$ und $\operatorname{span} M$ ist ein Teilraum (nach (a)), geht $W = \operatorname{span} M$ selbst in den Durchschnitt mit ein und daher ist $\operatorname{span} M \supseteq \bigcap W$. Die umgekehrte Inklusion ist aber auch klar, da jeder Teilraum W, der M enthält wegen der Abgeschlossenheit von $+$ und Vervielfachung auch alle Linearkombinationen von Elementen aus M enthält, also $W \supset \operatorname{span} M$. Hieraus folgt $\operatorname{span} M = \bigcap W$. ■

2.2.2 Summe und direkte Summe von Unterräumen

Definition 2.4 Es sei V ein Vektorraum.
(a) Es seien U_1 und U_2 seien lineare Teilräume von V. Dann heißt

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

die *Summe* der Teilräume U_1 und U_2.
(b) Es sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Teilräumen von V. Dann heißt

$$\operatorname{span} \bigcup_{i\in I} U_i$$

Summe der Teilräume $\{U_i \mid i \in I\}$. Wir bezeichnen sie mit $\sum_{i\in I} U_i$.
(c) Die Summe von Unterräumen $W := \sum_{i\in I} U_i$ heißt *direkt*, wenn sich jedes $w \in W$ auf genau eine Art als endliche Linearkombination von Elementen aus U_i schreiben lässt. Genauer, für jedes $w \in W$ gibt es eindeutig bestimmte, endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_r \in I$ und eindeutig bestimmte Elemente $u_k \in U_{i_k}$, $k = 1, \dots, r$, mit $w = u_1 + \cdots + u_r$. In diesem Falle schreiben wir auch $W = \bigoplus_{i\in I} U_i$.

Bemerkung 2.2 (a) In der Tat stellt Definition 2.4 (b) eine Verallgemeinerung von (a) dar. Denn für eine zweielementige Familie $\{U_1, U_2\}$ von Teilräumen von V ist $\operatorname{span}(U_1 \cup U_2)$ die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus U_1 und U_2, also die Menge aller

$$\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12} + \cdots + \lambda_r u_{1r} + \mu_1 u_{21} + \mu_2 u_{22} + \cdots + \mu_s u_{2s},$$

wobei $u_{1i} \in U_1$ und $u_{2i} \in U_2$. Da nun aber U_1 und U_2 Teilräume sind, ist $u_1 := \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12} + \cdots + \lambda_r u_{1r} \in U_1$ und $u_2 := \mu_1 u_{21} + \mu_2 u_{22} + \cdots + \mu_s u_{2s} \in U_2$; folglich ist

$$\operatorname{span}(U_1 \cup U_2) = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\} = U_1 + U_2.$$

(b) Eine Summe $W = U_1 + U_2$ von zwei Teilräumen ist direkt gdw. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. In der Tat, sei nämlich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und seien $w = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ zwei Darstellungen von $w \in W$ als Summe von

Elementen aus U_1 und U_2. Dann folgt $u_1 - u_1' = u_2' - u_2$. Diese Elemente liegen aber in U_1 und in U_2, also $u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Somit ist $u_2' - u_2 = u_1 - u_1' = 0$ und damit $u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$; die Darstellung ist eindeutig. **Achtung:** Eine Summe $U_1 + U_2 + U_3$ ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ *und* $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\}$. Die Bedingung $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ ist nicht hinreichend für die Direktheit der Summe, wie folgendes Beispiel (c) zeigt.
(c) Die Summe $\mathbb{R}(1,2,3) + \mathbb{R}(4,5,6) + \mathbb{R}(7,8,9) \subset \mathbb{R}^3$ ist nicht direkt, da $(8,10,12) = 2(4,5,6) = (1,2,3) + (7,8,9)$ zwei Darstellungen besitzt.

Beispiel 2.5 (a) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U_1 = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}e_1$ und $U_2 = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}e_2$. Dann gilt $U_1 + U_2 = V$. Diese Summe ist direkt, $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$.
(b) Für Unterräume U und W von V mit $U \subset W$ gilt $U + W = W$. Ist $U \neq \{0\}$, so ist die Summe nicht direkt.
(c) Es sei $V = \mathrm{Abb}([0,2], \mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen Funktionen, die auf dem Intervall $[0,2]$ definiert sind und $U_1 = \{f \in V \mid f(x) = 0 \ \forall x \in [1,2]\}$, $U_2 = \{f \in V \mid f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]\}$. Dann gilt $V = U_1 \oplus U_2$.

2.2.3 Die äußere direkte Summe von Vektorräumen

Definition 2.5 Es sei V_i, $i = 1, \ldots, n$ eine endliche Familie von Vektorräumen über $\mathbb{K}$. Dann wird die Menge

$$W := V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n = \{(v_1, \ldots v_n) \mid v_i \in V_i \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$, wenn man die Summe und die skalare Multiplikation koordinatenweise erklärt:

$$(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) := (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n), \quad \lambda(v_1, \ldots, v_n) := (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n),$$

wobei für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt $v_i, w_i \in V_i$.

In diesem Falle heißt W die *direkte Summe* der Vektorräume V_i und wir bezeichnen sie mit $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Bemerkung 2.3 (a) $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}$.
(b) Ist $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ die äußere direkte Summe von Vektorräumen V_i, so kann man die Teilmengen

$$\tilde{V}_k := \{(0, \ldots, v_i, 0, \ldots, 0) \in V \mid v_i \in V_i\}$$

definieren. Dann ist $\tilde{V}_i$ ein Unterraum von V und V ist die innere direkte Summe der $\tilde{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2.3 Die Basis eines Vektorraumes

2.3.1 Lineare Unabhängigkeit

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Definition 2.6 (a) Endlich viele Elemente $v_1,\dots,v_n$ aus V heißen *linear abhängig* (über $\mathbb{K}$), wenn es $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind und für die

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

gilt, das heißt, wenn die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ den Nullvektor nicht-trivial darstellen.
(b) Endlich viele Elemente $v_1,\dots,v_n$ aus V heißen *linear unabhängig* über $\mathbb{K}$, wenn sie nicht linear abhängig sind, das heißt, wenn für alle $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0. \tag{2.2}$$

Mit anderen Worten, eine Linearkombination der v_i, die den Nullvektor darstellt, muss die triviale Linearkombination sein.
(c) Eine nichtleere Teilmenge $M \subset V$ heißt *linear unabhängig* über $\mathbb{K}$, wenn jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist. Die leere Menge gilt als linear unabhängig.

Bemerkung 2.4 (a) In der obigen Definition ist bei (a) und (b) auch der Fall $n = 1$ eingeschlossen: $\{v\}$ ist linear unabhängig gdw. $v \neq 0$. Ist einer der Vektoren $v_1,\dots,v_n$ gleich dem Nullvektor, so ist die Menge linear abhängig, denn sei etwa $v_1 = 0$, dann ist $v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0$ eine nichttriviale Linearkombination, die die Null darstellt.
(b) Ist $v_1,\dots,v_k$ linear abhängig mit $k < n$, so ist auch $v_1,\dots,v_n$ linear abhängig. Umgekehrt ist jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge wieder linear unabhängig.
(c) Die Summe von Teilräumen $\mathbb{R}v_1 + \cdots + \mathbb{R}v_n$ ist direkt genau dann, wenn $\{v_1,\dots,v_n\}$ linear unabhängig ist. Dies folgt direkt aus dem untenstehenden Lemma 2.4 (b)

Beispiel 2.6 (a) Die Vektoren $(2,4,6),(3,6,9) \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, denn $3(2,4,6) + (-2)(3,6,9) = (0,0,0)$.
(b) Die Vektoren $v_1 = (1,2,3)$ und $v_2 = (3,2,1)$ sind im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig, denn das lineare Gleichungssystem

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+3x_3\\2x_1+2x_2\\3x_1+x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ist homogen und geht durch den Gauß-Algorithmus über in äquivalente homogene Systeme mit Koeffizientenmatrizen

$$\begin{pmatrix}1&3&|0\\2&2&|0\\3&1&|0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&|0\\0&-4&|0\\0&-8&|0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&|0\\0&1&|0\\0&0&|0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&|0\\0&1&|0\\0&0&|0\end{pmatrix}$$

über. Hieraus folgt, dass die einzige Lösung $x_1 = x_2 = 0$ ist; die Vektoren sind also linear unabhängig.
(c) Die Vektoren $v_1 = (1,\mathrm{i})^\top$ und $v_2 = (\mathrm{i},-1)^\top$ sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig als Elemente des reellen Vektorraumes $\mathbb{C}^2$, denn es gibt keine nichttriviale reelle Linearkombination $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Sie sind aber linear abhängig als Elemente des komplexen Vektorraumes $\mathbb{C}^2$, denn $v_2 = \mathrm{i}v_1$.
(d) Die Polynome $\{1, x, x^2, \dots\}$ bilden eine linear unabhängige Menge in $\mathbb{R}[x]$ (Beweis: später).

Aufgabe 2. Es sei $p \in V = \mathbb{R}_d[x]$ und $a \in \mathbb{R}$.
(a) Zeigen Sie, dass $B := \{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^d\}$ eine Basis in V bilden.
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von p bezüglich B. *Lösung.* Die Taylorentwicklung von p an der Stelle a gibt die Koordinaten:

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{p^{(d)}(a)}{d!}(x-a)^d.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie dass $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ als Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.
Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $v_1(x) = \sin x$ und $v_2(x) = \cos x$ und $v_0(x) = 1$ als Elemente des reellen Vektorraumes $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.
Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ genau dann linear unabhängig ist, wenn die Abbildung $\mathbb{K}^n \to V$ gegeben durch $f((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ injektiv ist.

2.3.2 Der Begriff einer Basis

Definition 2.7 Eine Teilmenge B eines Vektorraumes V heißt *Basis* von V, wenn gilt

1. B ist ein Erzeugendensystem von V.
2. B ist eine linear unabhängige Menge.

Beispiel 2.7 (a) Im $\mathbb{K}^n$ bilden die n Einheitsvektoren $\mathrm{e}_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ mit einer Eins an der $k$ten Stelle, $k = 1, \ldots, n$ eine Basis. In der Tat sind sie linear unabhängig, da aus $\alpha_1 \mathrm{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}_n = 0$, folgt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$. Somit ist α der Nullvektor, also $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$. Diese Basis heißt *kanonische Basis* oder *Standardbasis* des $\mathbb{K}^n$.
(b) Im Raum der (m, n)-Matrizen $\mathbb{K}^{m \times n}$ bilden die Matrixeinsen E_{rs}, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, n$ eine Basis, denn die Menge ist erzeugend und linear unabhängig. Die lineare Unabhängigkeit zeigt man genauso wie in (a).
(c) Die Polynome $\{1, x, \ldots, x^d\}$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}_d[x]$.
(d) Es seien

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \\ v_2 &= (0, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \\ \ldots & \quad \ldots \\ v_n &= (0, 0, \ldots, 0, x_{nn}) \end{aligned}$$

Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genau dann Basis von $\mathbb{R}^n$, wenn $x_{11} x_{22} \cdots x_{nn} \neq 0$.
Beweis. Wir zeigen, dass das System $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem im $\mathbb{R}^n$ ist, wenn die Bedingung $x_{11} x_{22} \cdots x_{nn} \neq 0$ erfüllt ist. Dazu müssen wir nach Beispiel 2.4 zeigen, dass das lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix, gebildet aus den Spaltenvektoren $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1$ für beliebige rechte Seiten lösbar ist. Das lineare GS liegt aber bereits in Dreiecksform vor. Zum Erreichen der Zeilenstufenform muss nur noch jede Zeile i durch x_{ii} geteilt werden, was nach Voraussetzung möglich ist. Somit ist das $n \times n$ lineare GS äquivalent

zu einer Zeilenstufenform mit genau n führenden Einsen. Das System ist eindeutig lösbar; die Vektoren erzeugen den $\mathbb{R}^n$.
Lineare Unabhängigkeit. Hierzu hat man das homogene lineare Gleichungssystem zu lösen. Die obigen Argumentationen mit den n führenden Einsen zeigen, dass das homogene System ebenfalls eindeutig lösbar ist; es gibt nur die triviale Lösung und somit sind die Vektoren linear unabhängig.
Ist umgekehrt das Produnkt der x_{ii} gleich Null, so ist mindestens ein Faktor Null, etwa $x_{kk} = 0$, $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es höchstens $n-1$ führende Einsen. Somit hat das homogene System unendlich viele Lösungen; die Vektoren sind also nicht linear unabhängig. ∎

2.3.3 Die Unabhängigkeit der Dimension von der Basis

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass zwei Vektorraumbasen in V stets dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Lemma 2.4 (Charakterisierung der Basis) *Es sei V ein Vektorraum, $V \neq \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Teilmenge von V. Dann sind äquivalent:*
(a) *B ist eine Basis von V.*
(b) *Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$.*
(c) *B ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d. h., für eine echte Teilmenge $C \subsetneq B$ ist* $\operatorname{span} C \subsetneq V$.
(d) *B ist eine maximale linear unabhängige Menge, d. h. jede Menge $D \supsetneq B$ ist linear abhängig.*

Beweis. Der Beweis folgt dem Schema $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$.
$(a) \Longrightarrow (b)$. Die Existenz der α_i ist klar, da B ein Erzeugendensystem für V ist. Wir zeigen die Eindeutigkeit. Seien $\alpha'_i \in \mathbb{K}$ andere Zahlen vin $v = \sum_{i=1}^n \alpha'_i b_i$, so hat man durch Gleichsetzen

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha'_i b_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) b_i = 0,$$

das heißt, dass der Nullvektor als Linearkombination der b_i dargestellt ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit von B folgt $\alpha_i - \alpha'_i = 0$ für alle i — die Darstellung ist eindeutig. Man nennt sie die *Koordinatendarstellung* von v bezüglich der Basis B.
$(b) \Longrightarrow (c)$. Wegen (b) gilt $\operatorname{span} B = V$. Angenommen, es gilt auch $\operatorname{span} C = V$. Wegen $V \neq \{0\}$ ist $C \neq \emptyset$. Sei $v \in B \setminus C$; da B echte Obermenge von C ist, gibt es solchen Vektor. Wegen $\operatorname{span} C = V$ existieren eindeutig α_i, $i = 1, \ldots, n$ mit $v = \sum_i \alpha_i c_i$ mit Vektoren $c_1, \ldots, c_n \in C$. Andererseits gilt aber in B, $v = 1 \cdot v$. Somit ist die Eindeutigkeit der Darstellung von v als Linearkombination von Elementen aus B verletzt. Die Annahme ist falsch; es gilt $\operatorname{span} C \neq V$.
$(c) \Longrightarrow (d)$. wir müssen zeigen: B minimal erzeugend impliziert B maximal unabhängig. Das stimmt sicher, wenn B nur aus einem Element besteht, etwa $B = \{b\}$. Wegen $V \neq \{0\}$ ist $b \neq 0$ und damit ist B linear unabhängig. Andernfalls hat B mindestens 2 Elemente. Wäre B linear

abhängig, so könnte ein Element von B als Linearkombination der anderen dargestellt werden, etwa $b = \sum_i \alpha_i b_i$. Dann ist aber auch $B \setminus \{b\}$ nach wie vor erzeugend; im Widerspruch zur Annahme in (c). Damit ist B linear unabhängig.
Wir zeigen die Maximalität. Da B erzeugend ist, lässt sich jeder weitere Vektor $d \in D \setminus B$ als Linearkombination von Elementen aus B darstellen. Damit ist aber $B \cup \{d\}$ linear abhängig.
$(d) \Longrightarrow (a)$. Sei B maximal linear unabhängig und $v \in V$. Wir müssen zeigen, dass B erzeugend ist, also $v \in \operatorname{span} B$. Da B maximal linear unabhängig ist, ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig, das heißt, es gibt eine nichttriviale Linearkombination, die den Nullvektor darstellt, etwa

$$\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n + \alpha v = 0. \tag{2.3}$$

Wäre hier $\alpha = 0$, so $\alpha v = 0$ und damit $\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = 0$, was aber $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ impliziert, da B linear unabhängig ist. Damit wäre (2.3) eine triviale Linearkombination, im Widerspruch zur Annahme. Folglich gilt $\alpha \neq 0$ und somit $v = -(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n)/\alpha \in \operatorname{span} B$. Da $v \in V$ beliebig war, heißt das $\operatorname{span} B = V$; B ist ein Erzeugendensystem und damit Basis.

■

Lemma 2.5 *Es sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und es sei $c = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ die Koordinatendarstellung eines Vektors $c \in V$, wobei $\alpha_1 \neq 0$ gelte.*
Dann ist $B' = \{c, b_2, \dots, b_n\}$ ebenfalls eine Basis von V.

Beweis. Da $\alpha_1 \neq 0$, kann man nach b_1 umstellen und hat $b_1 = (c - \alpha_2 b_2 - \alpha_3 b_3 - \cdots - \alpha_n b_n)/\alpha_1$. Also gilt $\operatorname{span}\{c, b_2, \dots, b_n\} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \dots, b_n\} = V$. Die Menge B' ist erzeugend.
Weiter ist B' aber auch linear unabhängig, denn

$$\beta c + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n = 0 \Longrightarrow \beta \alpha_1 b_1 + (\beta \alpha_2 + \beta_2) b_2 + \cdots + (\beta \alpha_n + \beta_n) = 0$$

impliziert $\beta \alpha_1 = 0$, also $\beta = 0$ und weiter $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$. Somit ist B' linear unabhängig.

■

Der nächste Satz stellt eine Verallgemeinerung des obigen Lemmas dar.

Satz 2.6 (Austauschsatz von Steinitz) *Es sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraumes V und $\{c_1, \dots, c_k\} \subset V$ sei linear unabhängig.*
Dann gilt $k \leq n$ und bei geeigneter Nummerierung der Vektoren $b_1, \dots, b_n$ ist auch $\{c_1, \dots, c_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Man erhält also wieder eine Basis, wenn man $c_1, \dots, c_k$ durch $n - k$ geeignete Vektoren unter den $\{b_1, \dots, b_n\}$ ergänzt.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über k. Als Induktionsanfang kann man den Fall $k = 0$ zulassen, in dem überhaupt keine Vektoren ausgetauscht werden und der Satz trivial ist.
Im allgemeinen Fall von k linear unabhängigen Vektoren $c_1, \dots, c_k$ sind auch die $k - 1$ Vektoren $c_1, \dots, c_{k-1}$ linear unabhängig und nach Induktionsvoraussetzung folgt $k - 1 \leq n$, und, bei geeineter Nummerierung ist $B^* := \{c_1, \dots, c_{k-1}, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Wäre

$k-1=n$, so wäre bereits $\{c_1,\ldots,c_{k-1}\}$ eine Basis von V (alle Vektoren b_i werden durch die c_i ausgetauscht). Dann ist aber c_k eine Linearkombination von $c_1,\ldots,c_{k-1}$. Das widerspricht der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $c_1,\ldots,c_k$. Daher gilt sogar $k-1<n$, also $k\le n$. Da B^* eine Basis von V ist gibt es Zahlen α_i, $i=1,\ldots,n$ mit

$$c_k=\alpha_1 c_1+\cdots+\alpha_{k-1}c_{k-1}+\alpha_k b_k+\cdots+\alpha_n b_n.$$

Würden hierbei $\alpha_k=\alpha_{k+1}=\cdots=\alpha_n=0$ gelten, so wäre $c_k\in\operatorname{span}\{c_1,\ldots,c_{k-1}\}$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\{c_1,\ldots,c_k\}$. Folglich ist mindestens einer der Koeffizienten $\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n$ von Null verschieden. Bei geeigneter Nummerierung der b_i können wir $\alpha_k\ne 0$ annehmen. Nach Lemma 2.5 ist dann $B':=\{c_1,\ldots,c_k,b_{k+1},\ldots,b_n\}$ eine Basis von V. ■

Folgerung 2.7 *Sind $\{b_1,\ldots,b_n\}$ und $\{c_1,\ldots,c_k\}$ Basen des Vektorraumes V, so gilt $k=n$.*

Beweis. Nach dem Steinitzschen Austauschsatz gilt einerseits $k\le n$, andererseits, wegen der Gleichberechtigung der Basen $\{c_i\}$ und $\{b_i\}$ auch $n\le k$. Wenn also ein Vektorraum überhaupt eine endliche Basis besitzt, dann bestehen alle seine Baasen aus gleichvielen Vektoren; besitzt aber ein Vektorraum eine unendliche Basis, so sind auch alle anderen Basen unendlich. ■

Definition 2.8 Wenn ein Vektorraum V eine endliche Basis besitzt, wird die allen Basen gemeinsame Anzahl von Basisvektoren die *Dimension* von V genannt, symbolisch $\dim V$. Besitzt V keine endliche Basis, so heißt V *unendlich-dimensional* ($\dim V=\infty$). Die Dimension des Nullraumes wird gleich 0 gesetzt.

Wir schreiben $\dim_{\mathbb{K}} V$ für die Dimension des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, wenn wir den Skalarenkörper $\mathbb{K}$ hervorheben wollen. Mitunter ist V ein Vektorraum über verschiedenen Körpern.

Beispiel 2.8 (a) Es gilt $\dim\mathbb{K}^n=n$. Der Raum der $m\times n$-Matrizen hat die Dimension mn, denn es gibt genau mn Matrixeinsen E_{rs}, vgl. Beispiel 2.7, die ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden.
(b) Es ist $\dim\mathbb{R}[x]=\infty$, denn $\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$ ist eine unendliche linear unabhängige Menge in $\mathbb{R}[x]$.
(c) $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n=2n$, denn die Vektoren $\{\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n,\mathrm{ie}_1,\ldots,\mathrm{ie}_n\}$ bilden eine Basis des reellen Vektorraumes $\mathbb{C}^n$.

(d) Es ist $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\infty$, das heißt, die reellen Zahlen bilden einen unendlich-dimensionalen Vektorraum über den rationalen Zahlen. In der Tat ist die Menge $\{\ln p\mid p$ ist Primzahl$\}$ eine $\mathbb{Q}$-linear unabhängige unendliche Menge in $\mathbb{R}$. Angenommen

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln p_i=0,$$

wobei die p_i Primzahlen sind und α_i beliebige rationale Zahlen. Multipliziert man diese Gleichung mit dem Hauptnenner der endlich vielen rationalen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ln p_i = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(p_i^{m_i}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{m_i}\right) = 0,$$

wobei die m_i alles ganze Zahlen sind. Hieraus folgt aber $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n} = 1$. Nach dem Hauptsatz der Zahlentheorie, hat aber jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung. Daher müssen alle $m_i = 0$ sein; damit folgt auch $\alpha_i = 0$ und die Menge ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Lemma 2.8 *Es sei* $\dim V = n < \infty$.
(a) *Eine linear unabhängige Menge C von V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.*
(b) *Eine linear unabhängige Teilmenge C von V ist genau dann Basis von V, wenn $\#C = n$.*
(c) *Für jeden Unterraum $U \subset V$ gilt* $\dim U \leq \dim V$. *Aus $U \subset V$ und* $\dim U = \dim V$ *folgt* $U = V$.

Beweis. (a) Es sei B eine Basis von V. Dann gilt $\#C \leq \#B = n$. Nach dem Steinitzschen Austauschsatz kann die linear unabhängige Menge C durch geeignete Vektoren der Basis B zu einer Basis von V ergänzt werden.
(b) Ist C noch keine Basis, so kann nach (a) C durch Vektoren zu einer Basis ergänzt werden, die dann n Elemente hat; also ist $\#B < n$. Wenn C bereits aus n Vektoren besteht, so ist werden keine Vektoren zum Ergänzen benötigt; somit ist C bereits eine Basis.
(c) Es sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $\{c_1, \ldots, c_k\}$ eine Basis von U. Nach dem Steinitzschen Austauschsatz gilt dann $k \leq n$. Ist aber $k = n$, so folgt nach Teil (b), dass $\{c_1, \ldots, c_k\}$ bereits eine Basis von V ist, also $U = V$. ■

Satz 2.9 (Dimensionssatz) *Es seien U und V zwei endlichdimensionale Unterräume eines Vektorraumes W. Dann gilt*

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V). \tag{2.4}$$

Beweis. Es sei $B_{\mathrm{D}} = \{d_1, \ldots, d_r\}$ eine Basis des Durchschnitts $U \cap V$, wobei auch $r = 0$ zugelassen ist, also $B_{\mathrm{D}} = \varnothing$ und $U \cap V = \{0\}$. Da B_{D} linear unabhängig auch in U und V ist, kann diese Menge nach Satz 2.6 sowohl zu einer Basis $B_1 = \{d_1, \ldots, d_r, a_1, \ldots, a_s\}$ von U als auch zu einer Basis $B_2 = \{d_1, \ldots, d_r, b_1, \ldots, b_t\}$ von V ergänzt werden. Wir wollen nun zeigen, dass $B = \{d_1, \ldots, d_r, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t\}$ eine Basis von $U + V$ ist. Jeder Vektor $w \in U + V$ lässt sich als $w = u + v$, $u \in U$, $v \in V$ schreiben. Da sich u als Linearkombination von B_1 und v als Linearkombination von B_2 schreiben lässt, ist $w = u + v$ eine Linearkombination von B. Also gilt $U + V = \operatorname{span} B$. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von B nehmen wir an, dass

$$\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_r d_r + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_s a_s + \gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_t b_t = 0, \tag{2.5}$$

also

$$\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_r d_r + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_s a_s = -(\gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_t b_t) =: x.$$

Da die linke Seite der obigen Gleichung in U liegt, die rechte aber in V, liegt der Vektor x in $U \cap V$ und ist demnach eine Linearkombination der Vektoren aus B_{D}. Also gibt es Zahlen $\delta_1, \dots, \delta_r$ mit

$$x = \delta_1 d_1 + \cdots + \delta_r d_r.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von B_1 folgt hieraus aber $\alpha_1 - \delta_1 = \cdots = \alpha_r - \delta_r = 0$ und $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$. Setzt man $\beta_i = 0$ in (2.5) ein, so hat man

$$\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_r d_r + \gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_t b_t = 0.$$

Da B_2 eine linear unabhängige Menge ist, folgt $\alpha_1 = \cdots = \gamma_t = 0$. Damit ist B eine Basis von $U + V$. Somit gilt

$$\dim U + \dim V = (r+s) + (r+t) = r + (r+s+t) = \dim(U \cap V) + \dim(U+V).$$

■

Bemerkung 2.5 (a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. Dies beweist man mit Hilfe des *Auswahlaxioms* der Mengenlehre:

> Es sei $\mathcal{P}$ eine disjunkte Zerlegung der nichtleeren Menge X in nichtleere Teilmengen $P \subset X$. Dann existiert eine Auswahlfunktion $f\colon \mathcal{P} \to X$ mit $f(P) \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

(b) Auch im unendlichdimensionalen Fall gilt der Austauschsatz. Zu je zwei Basen B und C eines Vektorraumes V gibt es bijektive Abbildung $\varphi\colon B \to C$. Lemma 2.8 hingegen bleibt nicht gültig für unendlich-dimensionale Räume.

2.3.4 Konstruktion von Basen zu Erzeugendensystemen

Eine typische Fragestellung ist: Finden Sie zu einem gegebenen Erzeugendensystem E eines Unterraumes U eine Basis von U. Nach Lemma 2.4 (c) kann man durch schrittweises Weglassen einzelner Vektoren aus E eine Basis erzeugen. Nach jedem Schritt müsste man kontrollieren, ob noch ein Erzeugendensystem übrig geblieben ist. Dieses Verfahren ist nicht praktikabel. Vielmehr wollen wir hier ein auf dem Gauß-Algorithmus beruhendes Verfahren vorstellen, das die gegebenen Vektoren linear kombiniert zu einer möglichst einfachen Basis.

Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ gegebene Vektoren, die den Unterraum $U = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ aufspannen. Wir betrachten die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, deren m Zeilen die Vektoren $a_1, \dots, a_m$ sind, also $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. Die drei elementaren Zeilenoperationen des Gauß-Algorithmus, verändern den Raum U, der durch die Zeilen der Matrix aufgespannt wird nicht. Ist die Zeilenstufenform erreicht, so kann man durch Weglassen der Nullzeilen sofort eine Basis von U angeben.

Beispiel 2.9 Man ermittle eine Basis des von den Vektoren $a_1 = (0,0,0,2,-1)$, $a_2 = (0,1,-2,1,0)$, $a_3 = (0,-1,2,1,-1)$ und $a_4 = (0,0,0,1,2)$ aufgespannten Teilraumes von $\mathbb{R}^5$.

0	0	0	2	-1	Vertauschen der ersten beiden Zeilen
0	1	-2	1	0	
0	-1	2	1	-1	
0	0	0	1	2	
0	1	-2	1	0	$\vert\cdot(+1)$ zur 3.Z.
0	0	0	2	-1	
0	-1	2	1	-1	
0	0	0	1	2	
0	1	-2	1	0	$\vert\cdot(-1)$ zur 3.Z.
0	0	0	2	-1	Streichen
0	0	0	2	-1	$\vert :2$
0	0	0	1	2	Vertauschen mit 2.Z.

0	1	-2	1	0
0	0	0	1	2
0	0	0	1	-1/2
0	0	0	0	0
0	1	-2	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Somit ist $b_1 = (0,1,-2,0,0)$, $b_2 = (0,0,0,1,0)$, $b_3 = (0,0,0,0,1)$ eine Basis von W.