Lineare Algebra für Physiker, Serie 5

Abgabe am 15.11.2007

1. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität über $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{llll} (a)\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & T_1(x,y) = (3x+2y, x), & (b)\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}, & T_2(x) = ax+b, \\ (c)\,\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}, & T_3(x,y) = x + \sqrt{2}y, & (d)\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}, & T_4(z) = \overline{z}, \\ (e)\,\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, & T_5(f) = f(1), & (f)\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}, & T_6(z) = \overline{z}, \end{array}$$

   dabei seien in (b) $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene reelle Zahlen, in (c) sei der Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und in (d) sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; in allen anderen Fällen sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. **6 P**

2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität über $\mathbb{R}$.

   (a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,
   (b) $S\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $S(A) = B \cdot A$, wobei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine gegebene Matrix ist.
   (c) $F\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(ax^2 + bx + c) = (a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$.
   (d) $G\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $(Gp)(x) = p(x-1)$.
   (e) $H\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $H(A) = A^\top$.
   (f) $\lim\colon c \to \mathbb{R}$, $\lim((x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n$, dabei sei $c \subset \omega$ der Raum der konvergenten reellen Folgen. **6 P**

3. Die Vektoren $b_1 = (1,2,1)$, $b_2 = (2,9,0)$ und $b_3 = (3,3,4)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$T(b_1) = (1,0), \quad T(b_2) = (-1,1), \quad T(b_3) = (0,1).$$

   Bestimmen Sie $T(7,13,7)$, $T(x_1,x_2,x_3)$ und $T(0, 3a^2+2b^2, 2a^2-b^2)$. **3 P**

4. Gegeben seien die Abbildungen $T_1\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ über

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie Matrizen A_1, A_2 mit $T_1(x) = A_1 x$, $x \in \mathbb{R}^4$, und $T_2(y) = A_2 y$, $y \in \mathbb{R}^2$ (Matrixprodukt).
   (b) Bestimmen Sie $T_2 \circ T_1$ und $A_2 A_1$. **3 P**

5. Eine Matrix quadratische $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt $A^\top = A$, sie heißt *schiefsymmetrisch*, wenn gilt $A^\top = -A$. Die Menge der symmetrischen n-reihigen Matrizen bezeichnen wir mit $\mathrm{sym}(n)$, die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen mit $\mathrm{alt}(n)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{sym}(n)$ und $\mathrm{alt}(n)$ Unterräume von $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind, bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimensionen der Räume.

   (b) Zeigen Sie: Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $S := \frac{1}{2}(B + B^\top)$ symmetrisch und $A := \frac{1}{2}(B - B^\top)$ schiefsymmetrisch.

   (c) Zeigen Sie: $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathrm{sym}(n) \oplus \mathrm{alt}(n)$. **3 + 1 + 2 P**