Lineare Algebra für Physiker, Serie 4

Abgabe am 8. 11. 2007

1. Gegeben seien zwei Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^3$. Dabei sei $U_1 = \operatorname{lin}\{(2,1,0),(1,2,3),(1,0,-1)\}$ und $U_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

   (a) Geben Sie eine Basis von U_1 an.
   (b) Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $b_1 = (-2,-1,1)$ und $b_2 = (\lambda, 3-\lambda^2, 1)$ eine Basis von U_2?
   (c) Geben Sie die Koordinaten von $v = (-3,9,5) \in U_2$ bezüglich der in (b) gefundenen Basen an.
   (d) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

   5 P

2. Es sei V ein reeller Vektorraum und $a,b,c,d,e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren

   $$v_1 = a+b+c, \qquad v_2 = 2a+2b+2c-d, \qquad v_3 = a-b-e,$$
   $$v_4 = 5a+7b+d-e, \qquad v_5 = a-c+3e, \qquad v_6 = 2a+2b+2c+d+e,$$

   linear abhängig sind. **3 P**

3. Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren $v_1 = (4,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,4,-1)$, $v_3 = (4,3,9,-2)$, $v_4 = (1,1,1,1)$ und $v_5 = (0,-2,-8,2)$.

   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
   (b) Wählen Sie alle möglichen Basen von U aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ aus und kombinieren Sie jeweils die restlichen Vektoren v_i aus dieser Basis.

   6 P

4. Geben Sie für die folgenden Untervektorräume jeweils eine Basis an. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebenen Mengen tatsächlich linear unabhängig und erzeugend sind.

   (a) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3x_2\}$.
   (b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
   (c) $\operatorname{lin}\{x^2, x^2 - x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^9 + x^5\} \subset \mathbb{R}[x]$.
   (d) $\{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \quad \text{für alle bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

   8 P