

Lineare Algebra für Physiker, Serie 4

Abgabe am 8. 11. 2007

1. Gegeben seien zwei Unterräume U_1 und U_2 von \mathbb{R}^3 . Dabei sei $U_1 = \text{lin}\{(2, 1, 0), (1, 2, 3), (1, 0, -1)\}$ und $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

- (a) Geben Sie eine Basis von U_1 an.
(b) Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $b_1 = (-2, -1, 1)$ und $b_2 = (\lambda, 3 - \lambda^2, 1)$ eine Basis von U_2 ?
(c) Geben Sie die Koordinaten von $v = (-3, 9, 5) \in U_2$ bezüglich der in (b) gefundenen Basen an.
(d) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

5 P

2. Es sei V ein reeller Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= a + b + c, & v_2 &= 2a + 2b + 2c - d, & v_3 &= a - b - e, \\ v_4 &= 5a + 7b + d - e, & v_5 &= a - c + 3e, & v_6 &= 2a + 2b + 2c + d + e, \end{aligned}$$

linear abhängig sind.

3 P

3. Gegeben seien im \mathbb{R}^4 die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$ und $v_5 = (0, -2, -8, 2)$.

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von $U = \text{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
(b) Wählen Sie alle möglichen Basen von U aus den Vektoren v_1, \dots, v_5 aus und kombinieren Sie jeweils die restlichen Vektoren v_i aus dieser Basis.

6 P

4. Geben Sie für die folgenden Untervektorräume jeweils eine Basis an. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebenen Mengen tatsächlich linear unabhängig und erzeugend sind.

- (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3x_2\}$.
(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
(c) $\text{lin}\{x^2, x^2 - x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^9 + x^5\} \subset \mathbb{R}[x]$.
(d) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

8 P