Lineare Algebra für Physiker, Serie 3

Abgabe am 1.11.2007

1. Bestimmen sie ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, das die folgenden Bedingungen erfüllt: $p(-1) = p(1) = 4$, $p(3) = -92$, $p(-2) = -2$. **3 P**

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 4x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
   (b) $U_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. **5 P**
   (c) $U_3 = \{(\lambda - \mu, \lambda^2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
   (d) $U_4 = \{(\lambda - \mu, \lambda^2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$.
   (e) $U_5 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \ \forall x \in \mathbb{R} \colon f(-x) = -f(x)\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(1, 3, 4)$, $(3, t, 11)$, $(-1, -4, 0)$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^3$.

   (b) Stellen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 dar.

   $$w = (6, 2, 1), \quad v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (7, 3, 1), \quad v_3 = (2, 5, 8).$$

   4 + 2 P

4. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) Es seien U_1, U_2, U_3 lineare Teilräume des Vektorraumes V. Dann ist $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ebenfalls ein linearer Teilraum von V.

   (b) Es seien U_1, U_2, U_3 lineare Teilräume des Vektorraumes V. Dann ist $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ ebenfalls ein linearer Teilraum von V.

   (c) Wie viele Untervektorräume hat $\mathbb{R}^2$

      (1) zwei: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$.
      (2) vier: $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \times \{0\}$ (die Koordinatenachen).
      (3) Unendlich viele (Begründung!).

   6 P

5. Es sei φ die Menge der *finiten* reellen Zahlenfolgen (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi := \{x = (x_n) \mid \ \exists\, m \in \mathbb{N} \ \forall\, k \in \mathbb{N} \colon k > m \Longrightarrow x_k = 0\}.$$

   Mit anderen Worten, φ besteht aus allen reellen Zahlenfolgen, die von einer gewissen Stelle ab nur noch Nullen haben, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$, wobei dies m von der Folge (x_n) abhängt.

   Zeigen Sie, dass φ ein reeller Vektorraum ist.
   Hinweis: Benutzen Sie, dass $\omega = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und $\varphi \subset \omega$. **4 P**