# Lineare Algebra für Physiker, Serie 2

**Abgabe am 25.10.2006**

---

**Zur OLAT-Registrierung:** Bitte machen Sie Folgendes mit ihrem Registrierungsschlüssel, den OLAT Ihnen nach Eingabe Ihrer e-mail-Adresse zugesandt hat:

1. Löschen Sie in `https://` das 's', sodass übrig bleibt `http://`
2. Löschen Sie die Zeichenfolge **:9101**, sodass die Adresse lautet `...de/olat/dmz...`
3. Setzten Sie ganz hinten **lang=de**

---

1. Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ und $D \in \mathbb{K}^{p\times q}$ gegeben. **9 P**

   (a) Beweisen Sie das Distributivgesetz $A(B+C) = AB + AC$.
   (b) Beweisen Sie $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
   (c) Beweisen Sie das Distributivgesetz $(B+C)D = BD + CD$. Finden Sie, wenn möglich, einen Beweis, der (a) und (b) benutzt und nicht die Matrixelemente.

   *Hinweis:* Berechnen Sie in (a) und (b) die Matrixelemente der beiden Seiten und vergleichen Sie diese.

2. Lösen Sie das folgende lineare $2 \times 2$ Gleichungssystem **6 P**

$$(4+7\mathrm{i})z_1 + (3-5\mathrm{i})z_2 = 22 - 9\mathrm{i}$$
$$(5+3\mathrm{i})z_1 + (2+6\mathrm{i})z_2 = 33 - 7\mathrm{i}.$$

   Geben Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von $z_1$ bzw. $z_2$ an.

3. Die folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen liegen in reduzierter Zeilenstufenform vor: **4 P**

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \quad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(c)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

   Lösen Sie die zugehörigen linearen Gleichungssysteme. Geben Sie eine geometrische Interpretation der Lösungsmenge an.

   Die folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen liegen in Zeilenstufenform vor

$$\text{(c)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{(d)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Lösen Sie die zugehörigen linearen Gleichungssysteme. Geben Sie eine geometrische Interpretation der Lösungsmenge an.

**(bitte wenden!)**

4. Lösen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die folgenden linearen Gleichungssysteme **4 P**

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4&=27\\ 4x_2+x_3-3x_4&=-2\\ 2x_1-2x_2+4x_3-x_4&=28\\ -4x_1+3x_2-2x_3+3x_4&=-31. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 10y-4z+w&=1\\ x+4y-z+w&=2\\ 3x+2y+z+2w&=5\\ -x-14y+5z-2w&=-3\\ x-6y+3z\qquad&=1. \end{aligned}$$